

Epreuve de Mathématiques
Examineur : M. TEBAYA AMBROISE

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de Justifier toutes ses affirmations.

Exercice 1 / **(03 points)**

L'unité de longueur est le centimètre

ABC est un triangle tel que $AB = AC = 5$ et $BC = 6$. I est le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC .

1. Faire une figure. 0,25pt
2. Démontrer que G est le barycentre des points pondérés $(A ; 1)$ et $(I ; 2)$. 0,5pt
3. Calculer les longueurs : AI , GA et GI . 0,75pt
4. Démontrer que pour tout point M du plan : $MA^2 + 2MI^2 = 3MG^2 + \frac{32}{3}$ 0,5pt
5. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$MA^2 + 2MI^2 = 32 . \quad \text{1pt}$$

Exercice 2 / **(02,5 points)**

On se propose de résoudre l'équation (E): $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$

1. Vérifier que 0 n'est pas une solution de (E) 0,25pt
2. On désigne par (E_1) l'équation $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$
 - a. Montrer que (E_1) et (E) sont équivalentes 0,5pt
 - b. On pose $X = x + \frac{1}{x}$.

Montrer que (E_1) est équivalente à (E_2) : $2X^2 - 9X + 10 = 0$ 0,75pt

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_2) et en déduire les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$. 1pt

Exercice 3 / **(04,5 points)**

Le plan est rapporté à un repère direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction u définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :

$$u(x) = \frac{2x+1}{x+2} \quad \text{1pt}$$

2. Soit (u_n) la suite définie : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$
 - a. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite (u_n) . 1pt
 - b. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) 0,5pt
3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{1+u_n}{2-2u_n}$
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. 0,5pt
 - b. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n . 0,5pt

- c. En déduire la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$. 0,25pt
4. On pose : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Calculer S_n en fonction de n et calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$. 0,75pt

Problème /

(10 points)

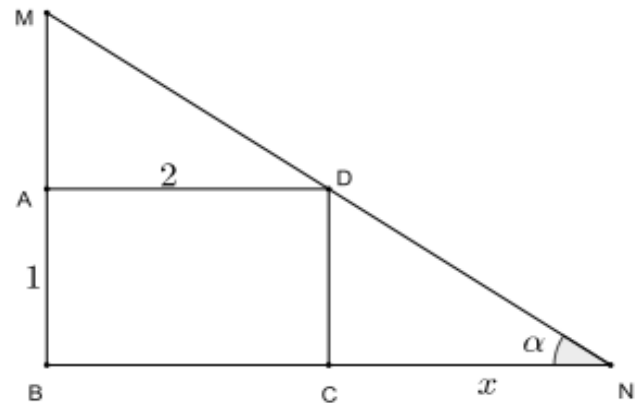
Les parties A et B sont liées

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.

Partie A /

(02 points)

Observez la figure ci-contre. ABCD est un rectangle tel que $AB = 1$ et $BC = 2$. On désigne par $\mathcal{B}(x)$ l'aire du triangle BMN. On se propose de déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle BMN est minimale. On pose $CN = x$



1. Montrer que $AM = \frac{2}{x}$ 0,5pt

2. Justifier que l'aire du trapèze BNDA est $\mathcal{A}(x) = \frac{x}{2} + 2$ 0,5pt

3. Justifier que l'aire du triangle BMN est $\mathcal{B}(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{2x}$. 1pt

Partie B /

(08 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{2x}$ et dont (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et l'écrire sous forme d'une réunion d'intervalles. 0,75pt
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f . 1pt
3. Donner le sens de variation de f . 0,75pt
4. Préciser les extremums de f . 0,75pt
5. Dresser le tableau de variation de f . 0,75pt
6. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in D_f$ on a : 1pt

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x}$$

7. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C_f) . 0,5pt
8. Etudier la position relative de (C_f) et (D) . 0,75pt
9. Démontrer que le point $I(0; 2)$ est un centre de symétrie de (C_f) . 0,75pt
10. Déterminer graphiquement le nombre et le signe de solutions de l'équation : 1pt

$$(E): x^2 + (4 - 2m)x + 4 = 0$$