LYCEE BILINGUE DE BAMYANGA			
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES			
Deuxième Évaluation	Classe : Tle C	Année scolaire 2020-2021	Date :
Épreuve de mathématiques	Durée : 4h	Coef: 7	02/12/2020

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES/15 points

EXERCICE 1 : (3.25 points)

1. Soit N un entier naturel, impair non premier. On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.
   a) Montrer que a et b n'ont pas la même parité. **0.5pt**
   b) Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
   En déduire la parité de p et q. **0.5pt**
2. Démontrer qu'il existe un seul couple $(a\,;b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et $PPCM(a,b) - PGCD(a,b) = 1$. **0.75pt**
3. Deux entiers M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.
   Démontrer que si l'entier M est divisible par 27, alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27. **0.5pt**
4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S)\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$. **1pt**

EXERCICE 2 : (3.75 points)

1. a) Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :
   $(x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) = x^k - 1$. **0.25pt**
   Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   b) Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n.
Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$. **0.5pt**
   c) Déduire de la question précédente que $a^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9. **0.75pt**
d) soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.
   (i) Justifier qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $mu - nv = d$.
   (ii) On suppose u et v strictement positifs.
   Montrer que : $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$. **1pt**
   (iii) En déduire le PGCD de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$. **0.25pt**

2. Trouver toutes les valeurs des chiffres x et y telles que le nombre $N = \overline{26x95y}$ dans le système décimal soit divisible par 3 et 11. **1pt**

EXERCICE 3 : (5 points)

1) Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme trigonométrique.
a) $z_1 = 1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$; b) $z_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{1-i}$; c) $z_3 = 1 + e^{i\theta}(\theta \in \mathbb{R})$;
d) $z_4 = -cos\frac{\pi}{7} + isin\frac{\pi}{7}$. **1pt**
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4 = 8\sqrt{2}(-1 + i)$. **1pt**
3) θ est un nombre réel tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. On donne le nombre complexe $X = \sin(2\theta) - 2i\sin^2(\theta)$.
   a) Déterminer le module de X. **0.25pt**
   b) Déterminer si possible un argument de X. **0.25pt**
4) Linéariser l'expression suivante : $f(x) = \sin^6 x$. **0.75pt**

5. On donne les nombres complexes z et u définis par :
$z = -8\sqrt{3} + 8i$ et $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

1. a) Ecrire z sous forme trigonométrique. **0.5pt**

b) Déterminer les racines carrées de z sous forme trigonométrique. **0.5pt**

2. a) Calculer u^2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ e de $\sin(\frac{5\pi}{12})$. **0.75pt**

EXERCICE 4 : (3 points)

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Déterminer géométriquement et représenter l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

a) $\arg(\frac{z-2-2i}{z+2-i}) = \frac{\pi}{5} + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$. ; b) $\left|\frac{z-2-i}{z-1+i}\right| = \frac{3}{2}$. **2pt**

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système d'inconnue a et b : $(S)\begin{cases}(3a+5b)(a+2b) = 1276 \\ ab = 2m\end{cases}$

où m est le $PPCM$ de a et b. **1pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES/5 points

Situation :

Monsieur MOUSSA est Comptable dans une société de micro finance. Il a un chantier qui n'est malheureusement pas desservi par une voie que peut emprunter un engin à moteur. Il achète le sable et a versé chez son voisin situé à une centaine de $mètres$ du chantier. Ce sable livré par une société et acheter à raison de 15000F le mètre cube (m^3) est contenu dans un bac plein de forme parallélépipédique de dimensions $3m \times a\,m \times b\,m$ où a et b vérifient en mètre le système : $\begin{cases}PPCM(a,b) = a+3 \\ PGCD(a,b) = 2\end{cases}$.

Ce sable devrait être transporté en 100 tours dans des seaux identiques et pleins par des garçons et des filles du quartier. Les garçons ont effectué 8 tours et les filles 5 tours. Pour les motiver, il leur propose un taux forfaitaire de 1000F par personne.

Frustré par ce problème qui le préoccupe, monsieur MOUSSA rejoint son lieu de service. Mais malheureusement il a oublié le mot de passe de son ordinateur. En fouillant ses documents, il tombe sur ce message : mot de passe « **WSAYZ** », fonction de codage : $f(x) \equiv \mathbf{17x + 22\ mod 26}$ où à chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25 respectivement par : $A = 0$; $B = 1$; $C = 2$; $D = 3$; ... ; $Z = 25$.

Tâches :

1. Déterminer le prix d'achat du sable. **1.5pt**
2. Déterminer le montant nécessaire à prévoir par M. MOUSSA pour satisfaire les transporteurs sachant qu'il y a plus de garçons que de filles. **1.5pt**
3. Décoder le mot de passe de son ordinateur. **1.5pt**

Présentation : 0.5pt

EXAMINATEUR : M. NOUMSSI