COLLÈGE François-Xavier VOGT
B.P. : 765 Ydé – Tél. : 222 31 54 28
e-mail : collegevogt@yahoo.fr

Année scolaire 2022-2023

Du 19-11-2022

CONTRÔLE

Classe : Tle C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4H

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES (15,50 POINTS)

EXERCICE 1 : (03,50 POINTS)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$. Soit la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}}$. On définit la suite de points M_n de la manière suivante : M_0 a pour affixe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et pour tout entier naturel n : $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. 0,75pt
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$. 0,75pt
3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieure ou égal à p. Démontrer que deux points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $(n-p)$ est multiple de 12. 0,75pt
4. a. On considère l'équation (E): $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(4; 9)$ est solution, résoudre l'équation (E). 0,75pt
   b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n, tels que M_n appartienne à la demi-droite $[O, \vec{u})$. 0,5pt

EXERCICE 2 : (05, 00 POINTS)

A- On considère la fonction h définie sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ par $h(t) = \sqrt[3]{2\cos x - 1}$.

1. Montrer que pour tout réel t, on a : $2\cos t - 1 = -4\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\right]$. 0,75pt
2. Montrer que pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right[$, $\frac{h(t)}{t-\frac{\pi}{3}} = -\sqrt[3]{\frac{4\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}{\left(t-\frac{\pi}{3}\right)^2}} \times \sqrt[3]{\frac{\sin\left[\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]}{t-\frac{\pi}{3}}}$. 0,5pt
3. En déduire $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{2\cos t - 1}}{x-\frac{\pi}{3}}$. 0,5pt

B- On considère les fonctions numériques définie sur $D =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ par
$j(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ et $k(x) = \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right)\sin\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$

1. Démontrer que pour tout $x \in D$, $k(x) = 2\frac{\sin(j(x))}{j(x)}$. 0,5pt
2. Déterminer la valeur exacte des limites $a = \lim\limits_{x\to+\infty} j(x)$ et $b = \lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$. 0,5pt

C- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation. 1pt
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera un encadrement à 0,1 près. 0,75pt
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) \leq 0$. 0,5pt

EXERCICE 3 : (07,00 POINTS)

A- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$. On donne quatre points d'affixes respectives : $Z_A = -2 + 6i$; $Z_B = 1 - 3i$; $Z_C = 5 + 5i$ et $Z_D = 2 + 4i$.

1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude qui s qui transforme C et D respectivement en A et B. 1pt
2. On considère la similitude s' définie par : $z' = 2iz + 13 + i$.
   a) Montrer que $s'os$ est une homothétie h dont on précisera le rapport. 0,75pt

b) Quel est l'image de C par h ? 0,5pt

3. On considère la rotation r d'écriture complexe $z' = iz + 2 + 4i$.
   a) Déterminer l'image de B par r. 0,5pt
   b) Montrer, sans calcul, que la transformation roh admet le point C pour point invariant. 0,5pt

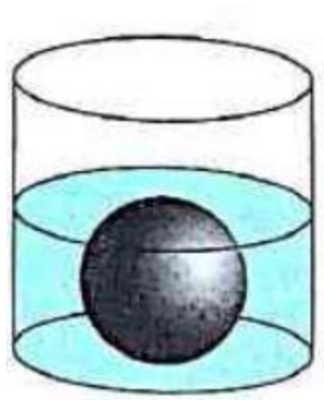
B- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 2. On note $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et $\bar{\alpha}$ le nombre complexe conjugué de α.

1. Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8$. 0,5pt
2. Démontrer que B et C d'affixes respectives α et $\bar{\alpha}$ appartiennent à $(\mathcal{C})$. 0,5pt
3. Soit D un point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $2e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi]$.
   a) Construire le point E image du point D par rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. 1pt
   b) Justifier que le point E a pour affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$. 0,5pt
4. Soit F et G les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CE]$.
   a) Justifier que les affixes de F et G sont respectivement : $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$ et $z_G = \frac{\bar{\alpha} + \alpha e^{i\theta}}{2}$ 0,5pt
   a) Démontrer que $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$. 0,5pt
   b) Justifier que le triangle AFG est équilatéral. 0,25pt

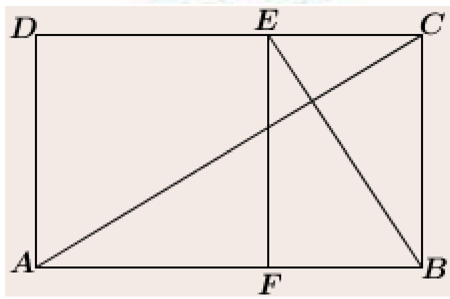
PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (04,50 POINTS)

SITUATION :

M. ESSOMBA est un fonctionnaire proche de la retraite salariale. Pour mieux préparer sa prochaine nouvelle vie, il décide d'acheter une grande parcelle de terrain pour construire sa maison de retraite dans une zone côtière. Le vendeur de terrain lui présente le titre foncier de la zone sur laquelle est marquée certaines informations complémentaires « AFED est un carré de côté 1, BCEF dans cet ordre l'image de ABCD par une similitude directe bien définie et l'unité de mesure est le décamètre », malheureusement la valeur de la longueur de ce terrain AB ne figure plus sur le titre et le mètre carré de terrain dans la zone est de 20.000 Francs.



YANN fils aîné de la famille ESSOMBA souhaite participer à un jeu concours qui consiste à choisir une boule, ensuite l'immerger dans de l'eau contenue dans un récipient cylindrique de rayon 12 cm. La hauteur de l'eau est de 5 cm. On gagne le jeu lorsque la surface de l'eau est tangente à la boule après immersion. Les boules disponibles pour le jeu sont toutes distinctes et ont un rayon compris entre 1 cm et 26 cm.



Pour les travaux d'aménagement de sa cour de 100 mètres carrés, M. ESSOMBA souhaite utiliser des dalles sous forme de pavés obtenus en plaçant les points images dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé d'unité 2 cm, les solutions l'équation $z^6 = 1$. On suppose que l'écart entre deux dalles consécutives est négligeable.

On suppose que : $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}238$ et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}736$

Tâche 1 : Quelle somme doit-il au moins prevoir pour l'achat de cette parcelle ? 1,5pt

Tâche 2 : Déterminer le nombre de gagnants de ce jeu concours. 1,5pt

Tâche 3 : Quel est le nombre de pavé que pourra utiliser M. ESSOMBA ? 1,5pt