Niveau : **Terminale D** | **Année Scolaire :** 2022– 2023
EVALUATION : N°4 | **Coef :** 04 **Durée :** 04H00

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PARTIEA : EVALUATION DES RESSOURCES **15,00 points**

EXERCICE 1 : 03,50 points

On considère la suite complexe $(Z_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ définie par $Z_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i)Z_n$. On appelle M_n le point d'affixe Z_n. Soit $(U_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $U_n = |Z_n|$.

1. *Démontrer que la suite $(U_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est géométrique en precisant la raison et le premier terme.* **1pt**
2. *Justifier que la suite $(Z_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est géométrique en précisant la raison* **0,75 pt**
3. *En déduire que pour tout entier naturel n, $Z_n = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \times e^{i\frac{n\pi}{4}}$.* **0,75 pt**
4. *Démontrer que pour tout entier naturel n le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle.* **1 pt**

EXERCICE 2 : 03,50 points

Le tableau ci-contre indique pour chaque année le nombre de milliers de mariages contractés dans les mairies du Cameroun. x_i Désigne le rang de l'année tandis que y_i désigne le nombre de mariage (en milliers).

Le nombre de milliers de mariages contractés en 2017 et en 2020 dans les archives de la direction générale des statistiques ont été égarés. Cependant, ces valeurs avaient permis par la méthode des moindres carrées d'obtenir la droite de régression de y en x dont l'équation réduite est la suivante, (D): $y = -22x + 397$.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	395	374	p	334	312	q	266

1) *Calculer la moyenne $\overline{x}$ et la variance $V(x)$ de x.* **1pt**

2) *Vérifier que $\overline{y} = \frac{1681+p+q}{7}$* **0,75pt**

3) *Démontrer que $Cov(x; y) = \frac{2q-p-823}{7}$* **0,75pt**

4) *Déterminer les valeurs de p et q.* **1pt**

EXERCICE 3 : 08 points

Partie A *: On considère la fonction g défine sur $]0; +\infty[$, par $g(x) = x^2 - 1 + ln(x)$*

1. *Calculer $g'(x)$ pour tout $x \epsilon\ ]0; +\infty[$. Etudier les son signe sur $]0; +\infty[$.* **1 pt**
2. *Dresser le tableau de variations de g sur $]0; +\infty[$.* **1 pt**
3. *Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$* **0,5 pt**
4. *Déterminer une primitive G de g sur $]0\,; +\infty[$* **0,5 pt**

Partie B : *Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + 2 - \frac{ln(x)}{x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unités 2cm. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel $n > 1$ par $U_n = \frac{ln(n)}{n}$.*

1. *a. Calculer la limite de f en 0. Interpreter graphiquement le résultat.* **0,5 pt**

Épreuve de Mathématiques

A-)Évaluation des ressources [15 points]

Exercice 1 [05 points]

I-) 1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$, puis écrire les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. **[1pt]**

b) Placer les images A et B des solutions dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan (où la partie imaginaire de z_A est négative). **[0,25pt]**

c) Quelle est la nature exacte du triangle OAB ? **[0,25pt]**

2. Soit f l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe $z^{'} = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. **[0,75pt]**

b) Déterminer sous forme triginométrique, puis sous forme algébrique l'affixe $A^{'}$ image de A par f. **[0,5pt]**

c) En déduire les valeurs exactes de cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$

II-) On considère l'équation (E) : $z^3 + (-5 + i)z^2 + (10 - 6i)z - 8 + 16i$

1. a) Montrer que $a = -2i$ est une solution de l'équation (E). **[0,25pt]**

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **[0,5pt]**

2. Soit A, B et C les points respectives d'affixes 2+2i, 3-i et -2i. S est la similitude directe de centre B qui transforme A en C.

a) Donner l'écriture complexe de S, puis donner son rapport et son angle. **[0,75pt]**

b) Déterminer l'expression analytique de S. **[0,25pt]**

Exercice 2 [05,5 points]

I-) On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$.

1. Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation. **[1pt]**

2. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$. **[0,5pt]**

b) Vérifier que $0,86 < \alpha < 0,87$. **[0,25pt]**

3. En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$. **[0,5pt]**

II-) Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthognal (O, I, J).

1. Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$. **[0,5pt]**

2. Montrer que pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, $f^{'}(x) = \frac{g(x)}{x^3}$. **[0,5pt]**

3. Dresser le tableau de variation de f. **[0,75pt]**

4. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$, puis étudier les relatives de $\mathcal{C}$ et (Δ). **[0,75pt]**

5. Construire $\mathcal{C}$ et (Δ) dans le repère (O, I, J). On prendra pour unités 2cm sur l'qxe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnés. **[0,75pt]**

Exercice 3 [04,5 points]

I-) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = \frac{1}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n^2$ et $v_n = \ln(\frac{3}{2}u_n)$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. **[0,5pt]**
2. Exprimer v_n et u_n en fonction de n. **[0,5pt]**
3. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times ...... \times u_{n-1}$
   a) Démontrer que $S_n = (1 - 2^n)\ln 2$ **[0,5pt]**
   b) Justifier que $T_n = (\frac{2}{3})^n e^{S_n}$. **[0,5pt]**
4. Exprimer T_n en fonction de n. **[0,5pt]**

II-) Soit h la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \neq -1$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$. **[0,75pt]**
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$ **[0,75pt]**
3. a) Montrer que $\forall x \in [0; 1]$, $\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq x^2$. **[0,5pt]**
   b) En déduire un encadrement de $\ln 2$. **[0,25pt]**

B-)Évaluation des compétences [4,5 points]

Un GIC d'agriculture de la ferme suisse a au cours de l'année scolaire 2021-2022 crée un jardin où il a semé des pasthéques dont la culture a coûté 2500 F le mètre carré. Ce jardin a la forme d'un ensemble des points M(z) du plan complexe tels que $\arg(\frac{z+4i}{z-6-4i}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. L'unité de mesure étant le mètre. Lors de la récolte, les membres de ce GIC se sont rendus compte qu'ils obtiennent un sac à chaque $3m^2$ dont l'un coûte 40.000 F.

Les membres dudit GIC ont voté pour placer 500.000 F de cette somme dans une microfinance dans le but d'acheter un tricycle qui coûte 800.000 F. Le bureau s'est dirigé vers une microfinance qui les propose deux options pour une durée de 7 ans : placement avec intérêts composés de 8% par an ou placement avec intérêts simples de 10% par an.

Pour embellir leur siège, le GIC a acheté deux plantes domestiques à savoir le FICUS mesurant 50 cm dont la hauteur croit de 20% de la hauteur précédente par an et le CACTUS mesurant 120 m dont la hauteur croit de 12cm chaque année. Ces plants ne doivent pas cacher l'affiche GIC situé à 2,5m du sol au dessus d'eux.

1. Quel est le bénéfice réalisé par le GIC à l'issu de sa récolte ? **[1,5pt]**
2. Quel est le mode de placement qui permettra au GIC de payer après 7 ans son tricycle ? **[1,5pt]**
3. Quelle est la plante qui atteindra en premier l'affiche du GIC ? **[1,5pt]**

***Présentation** 0,5pt*