Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : PROBATOIRE BLANC
Série : C/E Session : Avril 2023
Epreuve : Mathématiques
Durée : 3h Coefficient : 6

Cette épreuve, étalée sur deux pages, est notée sur 20 points. Toutes les questions sont obligatoires.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (4,5 points)

A) Soit $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+y-z=0\}$. On donne $\overrightarrow{e_1}(1,0,2)$ et $\overrightarrow{e_2}(0,1,1)$.

1. Montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. **0,75pt**
2. Vérifie que $\mathscr{B}=\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ est une base de E. **0,5pt**

B) Soit f un endomorphisme d'un plan vectoriel E de base $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, qui à tout vecteur $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$, associe le vecteur $\vec{u}'=f\left(\vec{u}\right)=(x-2y)\vec{i}+(2x+3y)\vec{j}$.

1. Donne la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}$. **0,5pt**
2. Montre que la matrice M est inversible et détermine M^{-1}. **0,5pt**
3. Soit g l'endomorphisme de E défini par $g\left(\vec{i}\right)=\vec{i}-\vec{j}+f\left(\vec{i}\right)$ et $g\left(\vec{j}\right)=8\vec{i}+f\left(\vec{j}\right)$.
   - **(a)** Détermine la matrice A de g dans la base $\mathscr{B}$. **0,5pt**
   - **(b)** Montre que $\ker g$ est une droite vectorielle dont une base est $\vec{a}=6\vec{i}-2\vec{j}$. **0,5pt**
   - **(c)** Montre que $\operatorname{Im} g$ est une droite vectorielle dont une base est $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$. **0,5pt**
4. Montre que $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ est une base de E, puis écris la matrice A' de g dans cette base. **0,75pt**

EXERCICE 2 : (3,25 points)

Une urne contient six boules portant le nombre 1, quatre boules portant le nombre $\sqrt{3}$, cinq boules portant le nombre -1 et cinq boules portant le nombre $-\sqrt{3}$ indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. On note a le nombre porté par la 1ère boule tirée et par b le nombre porté par la 2ème boule tirée. On considère l'équation :

$(E): a\cos x+b\sin x=0$ et on pose : $A(x)=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)-1.$

1. Calcule le nombre de tirages que l'on peut faire pour que $-\frac{\pi}{4}$ soit une solution de (E). **0,75pt**
2. Calcule le nombre de tirages que l'on peut faire pour que $\frac{\pi}{3}$ soit une solution de (E). **0,75pt**
3. **(a)** Montre que $A(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x$. **0,5pt**
   - **(b)** Détermine les réels r et φ pour que l'on ait : $A(x)=r\cos(x+\varphi)$. **0,5pt**
   - **(c)** Résous dans $]-\pi;\pi]$ l'équation $A(x)=0$. **0,75pt**

EXERCICE 3 : (4 points)

On considère la fonction numérique h d'une variable réelle x définie par $h(x)=\frac{3x^2-4x+3}{x^2+1}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=3$.

1. Etudie les variations de h et dresse son tableau de variation. **1,5pt**
2. Détermine 3 réels a,b et c tels que pour tout réel x, $h(x)=a+\frac{bx+c}{x^2+1}$. **0,5pt**
3. Montre que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(-x)+h(x)=6$; interprète graphiquement le résultat. **0,5pt**
4. Etudie la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$. **0,5pt**
5. Construis $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$. **1pt**

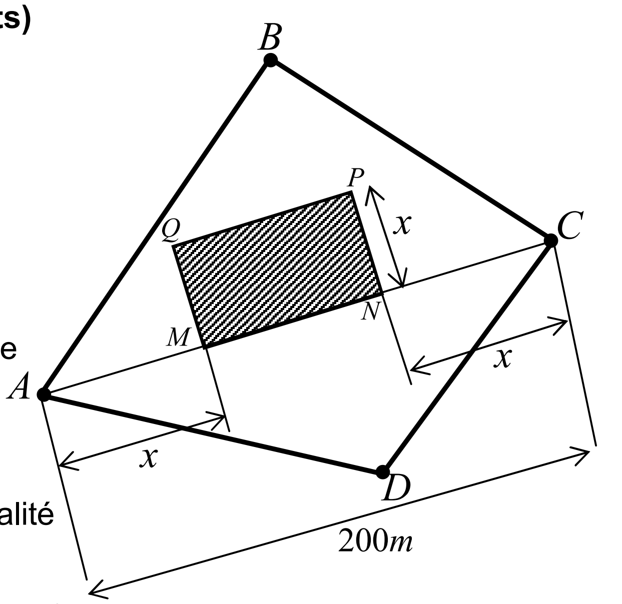
EXERCICE 4 : (3,25 points)

$ABCD$ est un carré de sens direct de centre O et de côté $3cm$. On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

1. Détermine les images des points A, B, C, D et O par la rotation r. **0,75pt**
2. Construis le point E tel que AEB soit un triangle équilatéral de sens direct. **0,25pt**
3. On note G le barycentre des points pondérés $(A;2),(B;1),(E;1)$ et I le milieu de $[BE]$.
   (a) Montre que G est le milieu du segment $[AI]$. **0,5pt**
   (b) Détermine et trace l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan tels que $MA^2+MI^2=\frac{27}{4}$. **1pt**
4. Soit h la transformation du plan qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{ME}$. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de h. **0,75pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

<u>SITUATION</u> :



La municipalité d'un village décide d'implanter une salle polyvalente sur une zone constructible. La zone constructible est représentée ci-contre par le quadrilatère $ABCD$. L'aire totale de la zone constructible est de $18400m^2$.

Sur la figure ci-contre, le rectangle $MNPQ$ représente la salle polyvalente. L'espace situé autour de la salle polyvalente sera appelé « espace vert » d'aire $13450m^2$.

Des études de la circulation automobile dans cette municipalité ont montré que, au cours d'une journée, entre $9h$ et $21h$, la concentration en ozone est donnée par la relation $C(t)=-0,7t^2+21t-86$ où t est le temps, en heure, et $C(t)$ la concentration, en $\mu g/m^3$ a l'instant t.

Pour lutter contre la pollution, cette municipalité met en place un système de location rapide de vélos. Le premier mois, on a 20.000 utilisations ; les mois suivants, elles augmentent de 5% par mois.

<u>Tâches</u> :

1. Détermine les dimensions possibles de la salle polyvalente. **1,5pt**
2. A quelle heure de la journée la pollution atteint-elle son maximum et quelle est sa concentration maximale ? **1,5pt**
3. Détermine le nombre total d'utilisations des vélos lors des deux premières années. **1,5pt**

Présentation générale : 0,5pt

ELEMENTS DE CORRECTION CLASSE DE $1^{ère}$C

Partie A EVALUATION DES RESSOURCES.

Exercice 1.

A) 1. Montrons que E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

i) On a : $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ et $2\times 0 + 0 - 0 = 0$, donc $(0,0,0) \in E$

par conséquent $E \neq \phi$. 0,25pt

ii) Soit $\vec{u}, \vec{v} \in E$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, montrons que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in E$

$\vec{u}(x,y,z) \in E \Rightarrow 2x+y-z=0$; $\vec{v}(a,b,c) \in E \Rightarrow 2a+b-c=0$.

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha(x,y,z) + \beta(a,b,c) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) + (\beta a, \beta b, \beta c)$$
$$= (\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b, \alpha z + \beta c) \in \mathbb{R}^3$$

et $2(\alpha x + \beta a) + \alpha y + \beta b - (\alpha z + \beta c)$

$= 2\alpha x + 2\beta a + \alpha y + \beta b - \alpha z - \beta c$

$= 2\alpha x + \alpha y - \alpha z + 2\beta a + \beta b - \beta c$

$= \alpha(2x + y - z) + \beta(2a + b - c)$

$= \alpha.0 + \beta.0$ car $\vec{u}, \vec{v} \in E$

$= 0$. 0,5pt

De (i) et (ii), on conclut que E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

2- Vérifions que $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de E.

. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$.

$$\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} = \vec{0}_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(1;0;2) + \beta(0;1;1) = (0;0;0)$$
$$\Rightarrow (\alpha, 0, 2\alpha) + (0;\beta;\beta) = (0;0;0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

donc le système $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est libre. 0,25pt

• Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur de E, alors $2x+y-z=0$.

$2x+y-z=0 \iff z = 2x+y$.

$$(x;y;z) = (x;y;2x+y) = (x;0;2x)+(0;y;y)$$
$$= x(1;0;2) + y(0;1;1)$$
$$= x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$$

donc le système $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est générateur de E. 0,25pt

le système $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ étant un système libre et générateur de E, alors $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de E.

B) 1- Donnons la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.

on a: $f(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = -2\vec{i} + 3\vec{j}$

donc $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 0,5pt

2. Montrons que la matrice M est inversible et déterminons M^{-1}

Nous avons: $\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3+4 = 7$. 0,25pt

Comme $\det(M) \neq 0$, alors M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$ 0,25pt

3. (a) Déterminons la matrice A de g dans la base $\mathcal{B}$.

on a: $g(\vec{i}) = \vec{i} - \vec{j} + f(\vec{i}) = \vec{i} - \vec{j} + \vec{i} + 2\vec{j} = 2\vec{i} + \vec{j}$

$g(\vec{j}) = 8\vec{i} + f(\vec{j}) = 8\vec{i} - 2\vec{i} + 3\vec{j} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$

donc $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 0,5pt

(b) Montrons que Ker g est une droite vectorielle dont une base est $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$.

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ un vecteur de E.

$\vec{u} \in \operatorname{Ker} g \iff g(\vec{u}) = \vec{0}_E \iff \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x+6y=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$

$\iff x+3y=0.$

0,5pt

$x+3y=0 \iff x=-3y.$

$(x;y) = (-3y;y) = -\frac{1}{2}y(6;-2) = -\frac{1}{2}y\vec{a}$ avec $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$.

Ker g est une droite vectorielle dont une base est $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$.

(c) <u>Montrons que Im g est une droite vectorielle dont une base est $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$.</u>

$\operatorname{Im} g = \{\vec{v} \in E \mid \exists \vec{u} \in E,\ g(\vec{u}) = \vec{v}\}$.

Soit $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ un vecteur de E.

$\vec{v} \in \operatorname{Im} g \iff \exists \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \in E \mid g(\vec{u}) = \vec{v}$

$\iff \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x+6y=x' \\ x+3y=y' \end{cases} \iff x'-2y'=0$

$x'-2y'=0 \iff x'=2y'.$

$(x';y') = (2y';y') = y'(2;1) = y'\vec{b}$ où $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$. 0,5pt

Im g est une droite vectorielle dont une base est $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

4. <u>Montrons que $(\vec{a}, \vec{b})$ est une base de E.</u>

Il suffit de montrer que $\det(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$, 0,25pt

$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$, donc $(\vec{a}, \vec{b})$ est une base de E

($(\vec{a}, \vec{b})$ est un système libre de 2 vecteurs dans un plan vectoriel)

<u>Ecrivons la matrice A' de g dans cette base.</u>

Comme $\vec{a} \in \operatorname{Ker} g$, alors $g(\vec{a}) = \vec{0}$

$$g(\vec{b}) = g(2\vec{i}+\vec{j}) = 2g(\vec{i}) + g(\vec{j}) = 2(2\vec{i}+\vec{j}) + 6\vec{i}+3\vec{j}$$
$$= 10\vec{i} + 5\vec{j} = 5(2\vec{i}+\vec{j}) = 5\vec{b}$$

donc $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ 0,5pt

Exercice 2.

1. **Calculons le nombre de tirages que l'on peut faire pour que $-\frac{\pi}{4}$ soit une solution de (E).**

$-\frac{\pi}{4}$ est solution de (E) $\iff a\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + b\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\iff \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}b = 0 \iff a = b.$ 0,25pt

Ainsi $(a;b) \in \{(1;1); (\sqrt{3};\sqrt{3}); (-1;-1); (-\sqrt{3};-\sqrt{3})\}$.

Il faut donc tirer 2 boules portant les mêmes nombres.

Le nombre de tirages que l'on peut effectuer est alors :

$N = A_6^2 + A_4^2 + A_5^2 + A_5^2 = 82.$ 0,5pt

2. **Calculons le nombre de tirages que l'on peut faire pour que $\frac{\pi}{3}$ soit une solution de (E).**

$\frac{\pi}{3}$ est solution de (E) $\iff a\cos\frac{\pi}{3} + b\sin\frac{\pi}{3} = 0 \iff \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0$

$\iff a + \sqrt{3}b = 0$

$a + \sqrt{3}b = 0 \iff a = -\sqrt{3}b$

Ainsi $(a;b) \in \{(\sqrt{3};-1); (\sqrt{3};1)\}$. 0,25pt

Le nombre de tirages que l'on peut ainsi effectuer est alors :

$N' = A_4^1 \times A_5^1 + A_4^1 \times A_6^1 = 44.$ 0,5pt

3. (a) **Montrons que $A(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$.**

$$A(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$
$$= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 + \sqrt{3}\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \cos\left(2\times\frac{x}{2}\right) + \sqrt{3}\sin\left(2\times\frac{x}{2}\right)$$
$$= \cos x + \sqrt{3}\sin x.$$ 0,5pt

(b) Déterminons les réels r et φ pour que l'on ait : $A(x) = r\cos(x+\varphi)$.

On a : $r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

$$A(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Ainsi, $r = 2$ et $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. 0,25pt x 2

(c) Résolvons dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $A(x) = 0$.

$$A(x) = 0 \iff 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$
$$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2} \iff \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$
$$\iff \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

0,75pt

x \ k	-1	0	1
$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$	//////	$\frac{5\pi}{6}$	//////
$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$	//////	$-\frac{\pi}{6}$	//////

Ainsi, $S_{]-\pi;\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

Exercice 3.

1. Etudions les variations de h et dressons son tableau de variations

pour tout réel x, $x^2 + 1 \neq 0$, donc $D_h = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$ 0,5pt

- h est continue et dérivable sur D_h en tant que fonction rationnelle et pour tout $x \in D_h$, $h'(x) = \frac{(6x-4)(x^2+1) - 2x(3x^2-4x+3)}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{4x^2-4}{(x^2+1)^2}$$

pour tout réel x, $(x^2+1)^2 > 0$, donc le signe de $h'(x)$ est celui de $4x^2-4$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

0,5pt

Ainsi, h est strictement croissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

h est strictement décroissante sur $]-1 ; 1[$.

Tableau de variations.

0,5pt

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
h	3	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

2. Déterminons trois réels a, b et c tels que pour tout réel x, $h(x) = a + \frac{bx+c}{x^2+1}$

pour tout réel x, $h(x) = \frac{3x^2-4x+3}{x^2+1} = \frac{3x^2+3-4x}{x^2+1} = \frac{3x^2+3}{x^2+1} - \frac{4x}{x^2+1}$

$$= \frac{3(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{4x}{x^2+1} = 3 - \frac{4x}{x^2+1}$$

donc $a = 3$; $b = -4$ et $c = 0$.

0,5 pt

3. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(-x) + h(x) = 6$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors on a : $h(-x) + h(x) = 3 - \frac{4(-x)}{(-x)^2+1} + 3 - \frac{4x}{x^2+1}$

$$= 3 + \frac{4x}{x^2+1} + 3 - \frac{4x}{x^2+1} = 6.$$

Interprétons graphiquement le résultat.

0,5pt

pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$ et $h(-x) + h(x) = 6 = 2 \times 3$, donc le point $\Omega(0 ; 3)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

4. Etudions la position relative de $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{D})$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $h(x) - 3 = 3 - \frac{4x}{x^2+1} - 3 = \frac{-4x}{x^2+1}$

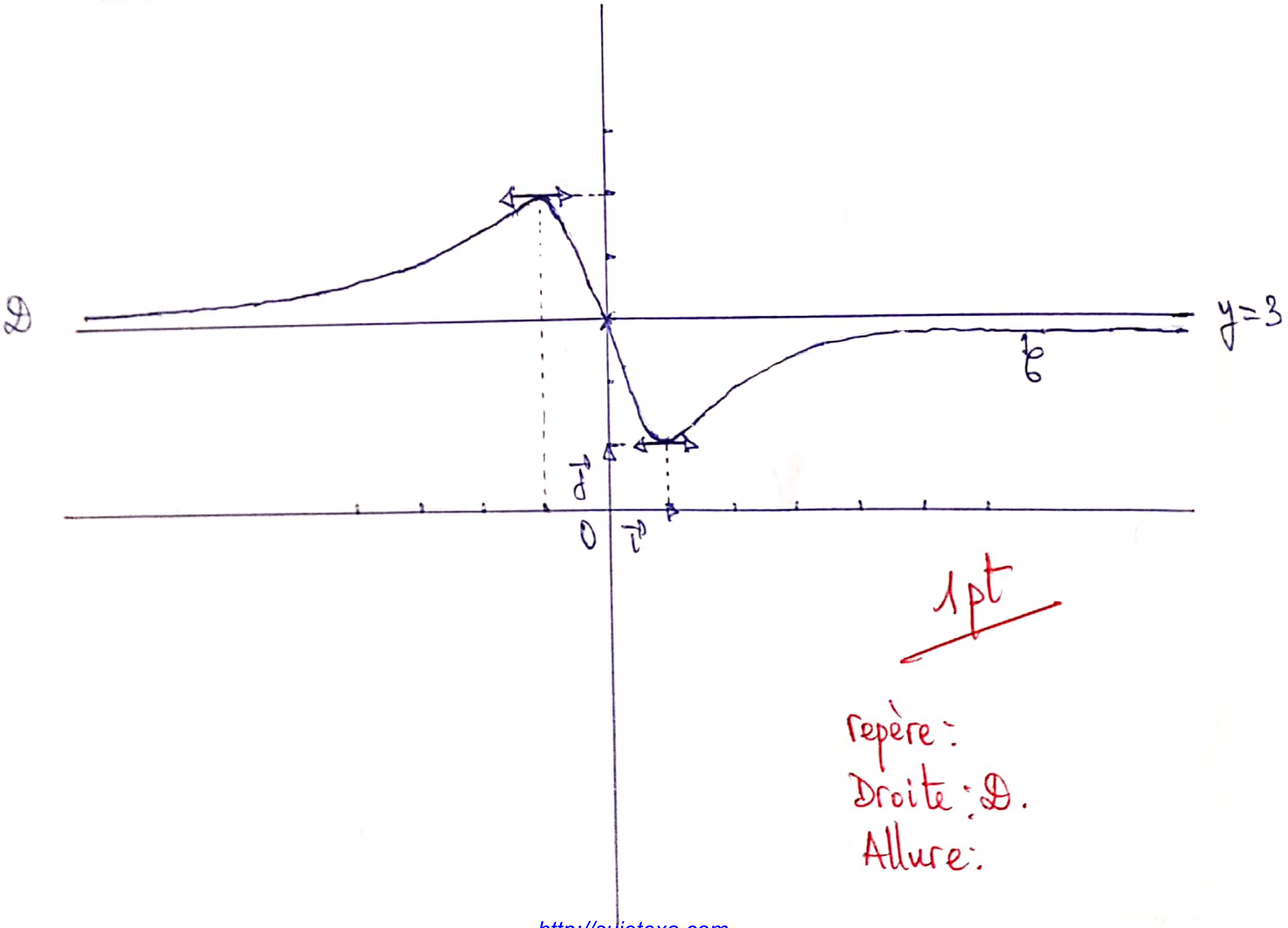
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1>0$, alors le signe de $h(x)-3$ est celui de $-4x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)-3$		$+$	0	$-$	

0,5pt

- Pour $x \in]-\infty; 0[$, $h(x)-3>0$, c'est-à-dire $h(x)>3$, alors $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$.
- Pour $x \in]0; +\infty[$, $h(x)-3<0$, c'est-à-dire $h(x)<3$, alors $\mathcal{C}$ est en-dessous de $\mathcal{D}$.
- pour $x=0$, $h(x)-3=0$, c'est-à-dire $h(x)=3$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se rencontrent

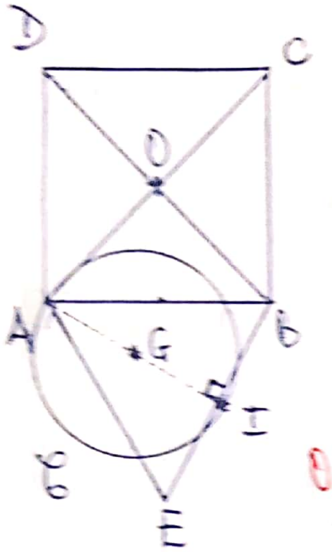
5. Construisons $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.



1pt

repère :
Droite : $\mathcal{D}$.
Allure :

Exercice 4



0,25pt

1. Déterminons les images des points A, B, C, D et O par la rotation r

$r(A) = D$; $r(B) = A$, $r(C) = B$; $r(D) = C$; $r(O) = O$. 0,75pt

2. Construisons le point E tel que AEB soit un triangle équilatéral de sens direct.

(Voir figure).

3- (a) Montrons que G est le milieu du segment [AI]

On a : $G = bar\{(A;2),(B;1);(E;1)\}$

I étant le milieu de [BE], alors $I = bar\{(B;1);(E;1)\}$

Ceci étant : $G = bar\{(A;2);(I;2)\}$

d'où G est le milieu du segment [AI] 0,5pt

(b) Déterminons et traçons l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan tels que $MA^2 + MI^2 = \frac{27}{4}$.

$$MA^2 + MI^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GI})^2$$

$$= 2MG^2 + 2GA^2 = 2MG^2 + 2\times\left(\frac{AI}{2}\right)^2$$

$$= 2MG^2 + \frac{AI^2}{2}$$

$$= 2MG^2 + \frac{1}{2}(AE^2 - EI^2)$$

$= 2MG^2 + \frac{1}{2}\left(3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = 2MG^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(9 - \frac{9}{4}\right) = 2MG^2 + \frac{27}{8}$. 0,5pt

$MA^2 + MI^2 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow 2MG^2 + \frac{27}{8} = \frac{27}{4} \Leftrightarrow 2MG^2 = \frac{27}{8}$

$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{27}{16} \Leftrightarrow MG = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{AI}{2}$

0,5pt

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{AI}{2}$ (ou de diamètre [AI])

4- Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de h.

Nous avons: $2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{ME} = 2\vec{MA} + 2\vec{MI}$

$= 2\left(\vec{MG} + \vec{GA} + \vec{MG} + \vec{GI}\right)$

$= 4\vec{MG}$, car G est milieu de [AI].

Ceci étant, $\vec{MM'} = 2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{ME}$

$\Leftrightarrow \vec{MM'} = 4\vec{MG}$

$\Leftrightarrow \vec{MG} + \vec{GM'} = 4\vec{MG} \Leftrightarrow \vec{GM'} = 3\vec{MG}$

$\Leftrightarrow \vec{GM'} = -3\vec{GM}$

1pt

$h(M) = M' \Leftrightarrow \vec{GM'} = -3\vec{GM}$

Ainsi, $\boxed{\text{h est une homothétie de centre G et de rapport } -3.}$

Partie B ÉVALUATION DES COMPÉTENCES.

Tâche 1 Déterminons les dimensions possibles de la salle polyvalente.

· Exprimons en fonction de x, l'aire $\mathcal{A}$ de la « zone espace vert ».

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{zone\ constructible} - \mathcal{A}_{salle\ polyvalente}$

$\mathcal{A}_{salle\ polyvalente} = MN \times PN$; $MN = 200 - x - x = 200 - 2x$

$= (200 - 2x)x$

$= -2x^2 + 200x$

$\mathcal{A} = 18400 - (-2x^2 + 200x) = 2x^2 - 200x + 18400$.

$\mathcal{A} = 13450 \iff 2x^2 - 200x + 18400 = 13450$

$\iff 2x^2 - 200x + 4950 = 0$

$\iff x^2 - 100x + 2475 = 0$.

$\underline{1{,}5pt}$ C_1 C_2 C_3.

$x_1 = 55$; $x_2 = 45$.

- Si $x = 55m$; la salle polyvalente mesure 55m de large et $200 - 110 = 90$ m de long.
- Si $x = 45m$: la salle polyvalente mesure 45m de large et 110m de long

Tâche 2. Heure de la journée à laquelle la pollution atteint son maximum ; Concentration maximale.

$t \in [9;21]$.

Considérons la fonction C définie sur $[9;21]$ par $C(t) = -0{,}7t^2 + 21t - 86$.

C est continue et dérivable sur $[9;21]$ et pour tout $t \in [9;21]$,

$C'(t) = -1{,}4t + 21$.

$C'(t) = 0 \iff t = 15$.

t	9		15		21
$C'(t)$		+	0	−	

Ainsi, C est strictement croissante sur $[9;15[$ et strictement décroissante sur $]15;21]$.

t	9		15		21
$C'(t)$		+	0	−	
C	46,3	↗	71,5	↘	46,3

$\underline{1{,}5pt}$ C_1 C_2 C_3

La pollution atteint son maximum à 15h. Sa concentration maximale est de $71,5\ \mu g/m^3$.

Tâche 3. Déterminons le nombre total d'utilisations des vélos lors des deux premières années.

- Désignons par U_n le nombre d'utilisation des vélos au $n^{ième}$ mois

On a : $U_1 = 20.000$.

$$U_{n+1} = U_n + \frac{5}{100}U_n = \left(1+\frac{5}{100}\right)U_n$$
$$= 1,05\,U_n.$$

donc (U_n) est une suite ~~arithmétique~~ géométrique de raison $q = 1,05$ et de premier terme $U_1 = 20.000$

Ceci étant, pour tout $n \geq 1$, $U_n = U_1 \times q^{n-1} = 20.000\,(1,05)^{n-1}$.

- le nombre total d'utilisations des vélos lors des deux premières années est $U_1 + U_2 + \dots + U_{24}$.

$$U_1 + U_2 + \dots + U_{24} = U_1 \times \frac{1-q^{24}}{1-q} = 20.000 \times \frac{1-(1,05)^{24}}{1-1,05}$$
$$\simeq 890\,039.$$

Lors des deux premières années, il y a eu 890 039 utilisations des vélos.

1,5 pt

C_1

C_2

C_3.