Institut Blaise Pascal
Discipline-Travail-Succès
Département de mathématiques

TRAVAUX DIRIGES : Prépa Bac C

Année Scolaire : 2022-2023
Classe :Tle C.

E-LEARNING : 672505048

EXERCICE 1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. Soit A le point d'affixe 2i et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=\dfrac{2iz-5}{z-2i}$.

1-Démontrer que f admet deux points invariants.

2-Démontrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

3-Démontrer que la droite de repère $\left(O,\vec{e_2}\right)$, privée de A, est globalement invariante par f.

4-a) Démontrer que : $\left|z'-2i\right|\cdot\left|z-2i\right|=9$.

b) En déduire l'image par f du cercle (C) de centre A et de rayon R.

c) Déterminer R pour que (C) soit globalement invariant par f.

EXERCICE 2 :

Soit le nombre complexe $z=e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose : $a=z+z^2+z^4$ et b$=z^3+z^5+z^6$.

1. Démontrer que a et b sont deux nombres complexes conjugués et que la partie imaginaire de a est positive.

2. Calculer $a+b$ et ab. En déduire a et b.

EXERCICE 3 :

On considère les complexes Z_n de la manière suivante :

$Z_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $Z_{n+1}=\frac{1}{3}Z_n+\frac{2}{3}i$.

1- Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \left|Z_n\right|<1$.

2- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $U_n=Z_n-i$.

a) Démontrer que $\left(U_n\right)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n=\dfrac{1-i}{3^n}$.

EXERCICE 4 :

On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=x-1-2ln\,(\frac{x-1}{x})$. (C) désigne sa représentation graphique de f dans un repère orthogonal d'unité graphique 2cm.

Partie A

1) Dresser le tableau de variations de f

2) Montrer que $(D): y=x-1$ est asymptote à (C). Préciser la position de (C) par rapport à (D).

3) Construire (C) et (D) dans le même repère.

4) Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2,+\infty[$.

5) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0=3\\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$ où n est un entier naturel.

1) Résoudre dans l'intervalle $[1,+\infty[$ l'équation $f(x)=x$. On désigne par x_0 la solution de cette équation.

2) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[2,3]$, $\left|f'(x)\right|\leq\frac{2}{3}$

3) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[2,3]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $[2,3]$

4) En déduire par récurrence que $U_n\in[2,3]$

5) Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}, |U_{n+1}-x_0|\leq\frac{2}{3}|U_n-x_0|$$

6) Déduire que $\forall n\in\mathbb{N}, |U_n-x_0|\leq(\frac{2}{3})^n|U_0-x_0|$

7) Montrer que (U_n) est convergente, (on précisera la limite de (U_n))

EXERCICE 5 :

1. Soit (v_n) une suite géométrique strictement positive de premier terme v_0 et de raison q. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=lnv_n$ où ln est le logarithme népérien. Montrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique que l'on caractérisera.

2. On suppose maintenant que (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1. Soit q un réel non nul. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $v_n=q^{u_n}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.

3. On pose pour ≥ 1 , $w_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ et $t_n=w_n+\frac{1}{n.n!}$

a) Déterminer w_1 et t_1

b) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $w_n\leq t_n$

c) Montrer que (w_n) est croissante et que (t_n) est décroissante.

d) Calculer $lim_{n\to+\infty}(t_n-w_n)$. En déduire que (w_n) et (t_n) sont convergentes et ont une limite commune ℓ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $w_n\leq\ell\leq t_n$. (On dit que (w_n) et (t_n) sont des suites adjacentes.)

EXERCICE 6:

Soit n un entier naturel non nul, on note $\varphi(n)=C_{2n}^n$.

1. Exprimer $\varphi(n+1)$ en fonction de n et de $\varphi(n)$.

2. Montrer que, pour tout $n\geq 2$, $\varphi(n)<4\varphi(n-1)$.

Puis, que : $\varphi(n)>\frac{4}{n}(n-1)\varphi(n-1)$.

3. En déduire que, pour $n\geq 2$, $\frac{1}{2n}<\frac{\varphi(n)}{4^n}<\frac{1}{2}$.

4. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n=\frac{\varphi(n)}{4^n}$ est croissante.

5. Etudier la convergence de (u_n).

EXERCICE 7 :

On se propose d'étudier la suite $\left(U_n\right)$ définie $\mathbb{N}$ par :

$U_0=\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et pour $n>0$, $U_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

1- a) f est la fonction définie sur $[0;1]$ par

$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Calculer $f'(x)$ et en déduire la valeur de U_0.

b) Calculer U_1.

2- a) Montrer que la suite $\left(U_n\right)$ est décroissante et convergente.

b) Montrer que pour tout x de $[0;1]$, $1\leq\sqrt{1+x^2}\leq\sqrt{2}$ et en déduire que pour tout entier $n\geq 1$, $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}}\leq U_n\leq\dfrac{1}{n+1}$.

c) Quelle est la limite de $\left(U_n\right)$?

3- Pour tout entier

$n\geq 3$, $on\ \ pose\ \ I_n=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx$.

a) Vérifier que pour tout entier $n \geq 3$,

$on\ a : U_n + U_{n-2} = I_n$.

b) Montrer, après une intégration par parties portant sur I_n, que : $nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$.

c) En déduire que pour tout entier $n \geq 3,\ on\ a : (2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$.

d) Déduire des questions 2-b) et 3-c), que la suite (nU_n) est convergente et calculer sa limite.

<u>EXERCICE 8 :</u>

Le but de l'exercice est de calculer $\int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$.

Soit *h* la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

et *k* la fonction définie sur $I = [0;\frac{\pi}{2}]$ par k(x) = $\tan^2$x.

1- Calculer $h \circ k(0)$.

2- Montrer que pour tout x appartenant à I, $(h \circ k)'(x) = 4\tan^2 x$.

3- Déduire des deux questions précédentes l'expression de $h \circ k$.

4- Calculer $k(\frac{\pi}{4})$ et en déduire $\int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$.

<u>EXERCICE 9 :</u>

F est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t}dt.$

1- Montrer que f est parfaitement définie sur $]0;+\infty[$.

2- Montrer que $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t}dt - \int_1^x \frac{e^{-t^2}}{t}dt$.

3- Montrer que *f* est dérivable sur $]0;+\infty[$ et déterminer *f'*.

4- Montrer que l'équation *f'*(x) = 0 admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique α puis donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

5- Dresser le tableau de variation de *f*.

6- Montrer que pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, *f*(x) est compris entre $e^{-x^2}\int_x^{x^2}\frac{1}{t}dt\ \ et\ \ e^{-x^4}\int_x^{x^2}\frac{1}{t}dt$. (On distinguera le cas où $x \in]0;1]$ puis le cas où $x \in [1;+\infty[$).

En déduire la limite de *f*(x) quand x tend vers 0, puis quand x tend vers $+\infty$.

<u>EXERCICE 10 :</u>

1- Résoudre dans ℝl'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 5y = 0$.

2. Déterminer la fonction *f* qui vérifie : *f*(0) = 1 et *f'*(0) = −1.

3. On pose : $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$.

a) Démontrer que F est une primitive de *f* sur ℝ ; expliciter F(x).

b) En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

<u>EXERCICE 11 :</u>

On considère l'équation différentielle $(E_n) : y' + y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

1-On pose $g(x) = h(x)e^{-x}$.Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$.

2-Déduire les fonctions h et g sachant que h(0)=0.

3-Soit φ une fonction dérivable sur ℝ, montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation (F) : y'+y=0.

4-Résoudre (F), déterminer la solution générale φ de (E_n), puis déduire la solution particulière f vérifiant f(0)=0.

<u>EXERCICE 12 :</u>

Le plan est muni du repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. A(1, 0), B$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$, C$\left(\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right)$, et la droite (D) : x=1. Γ est l'ensemble des points M(x, y) tels que :

$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x-1)^2$

1. a) Déterminer les coordonnées de G=bar {(A,-1) ;(B,1) ;(C,1)}.

b) Vérifier que B et C sont les points de Γ.

2. a) Montrer que Γ est l'ensemble des points M tels que $MG = \sqrt{2}MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur (D).

b) En déduire la nature de Γ et préciser ses éléments remarquables.

3. a) Donner une équation de Γ dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

b) Représenter Γ dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

4. a) Donner une équation de la tangente à Γ au point C.

b) Trouver une équation de Γ dans $(O;\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

<u>EXERCICE 13 :</u>

Soit E un plan vectoriel, $a, b \in \mathbb{Z}$ et $B = (\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$une base de E.

Soit f l'endomorphisme de E défini pour tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \in E$ par : $f(\vec{u}) = (2x + ay)\vec{\imath} + (bx + 3y)\vec{\imath}$.

1. Ecrire la matrice de f relativement à la base B.

2. Déterminer suivant les valeurs de a et b, $Ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3. Pour quelles valeurs de a et b, f n'est pas un automorphisme ?

4. On suppose maintenant que $ab = 12$, avec $1 < a < b < 5$.

a) Ecrire la matrice M de f dans la base B.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre dans ℝ l'équation $Dét(M - \lambda I) = 0$ d'inconnue λ, où I désigne la matrice identité et $Dét$ désigne le déterminant.

c) Déterminer une base pour chacun des sous espaces vectoriels :

$E_{-1} = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$ et $E_6 = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = 6\vec{u}\}$.

d) Soit $\overrightarrow{e_{-1}}$ une base de E_{-1} et $\overrightarrow{e_6}$ une base de E_6.Montrer que$(\overrightarrow{e_{-1}},\overrightarrow{e_6})$est une base de E.

e) Ecrire la matrice D de f dans la base $(\overrightarrow{e_{-1}},\overrightarrow{e_6})$.

f) Calculer D^2, puis conjecturer D^n $(n \in \mathbb{N})$ et le prouver par récurrence.

<u>EXERCICE 14 :</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}lnx$.

1. Etudier les variations de f.

2. Tracer (Cf) . unité : 5cm.

3. Soit $\lambda>0$, $I(\lambda)=\int_{\lambda}^{1} f(x)dx$.
a) Calculer $I(\lambda)$.
b) Trouver $I_0=\lim_{\lambda\to 0^+} I(\lambda)$.
4. Soit n∊ℕ, $n\geq 2$, $S_n=\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$.
a) Justifier que pour p∊ℕ ; $1\leq p\leq n-1$;
$\frac{1}{n}f\left(\frac{p+1}{n}\right)\leq\int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)dx\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{p}{n}\right)$.
b) En déduire que $S_n-\lambda f(\lambda)\leq I(\lambda)\leq S_n$; avec $\lambda=\frac{1}{n}$.
c) Etablir que $I(\lambda)\leq S_n\leq I(\lambda)+\lambda f(\lambda)$; avec $\lambda=\frac{1}{n}$..
Justifier que $\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{1}{3}$.
5. a) Montrer que pour tout n dans ℕ*,
$\sum_{p=1}^{n} p^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
b) Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ avec $u_n=\frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}$.
Prouver que $S_n=\frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}ln(u_n)$.
c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 15 :
On considère trois urnes U, V et W contenant chacune des boules portant le numéro 1 ou le numéro 2. La probabilité de tirer une boule numérotée 1 de U est $P_1=0{,}4$; celle de tirer 1 de V est $P_2=0{,}6$ et enfin celle de tirer 1 de W est $P_3=0{,}7$.
On tire une boule de U, une boule de V et une autre de W. Soient a, b et c les numéros respectifs de ces boules. Soit (Q) le plan d'équation : $ax+by+cz+6=0$, et soit (E) la conique d'équation : $\frac{x^2}{a^2}-(-1)^c\frac{y^2}{b^2}=1$.
Calculer la probabilité pour que :
- **a)** (Q) soit parallèle au plan (P) : $x+2y+z-4=0$;
- **b)** (Q) contiennent le point $M(0,-2,-2)$;
- **c)** (E) soit une ellipse ;
- **d)** (E) soit une hyperbole équilatère.

EXERCICE 16 :
On pose $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n t dt$.
1. Démontrer que : $I_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}I_n$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $I_{2n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\times\frac{\pi}{2^{2n+1}}$.

EXERCICE 17 :
Une urne U_1 contient 3 boules marquées 1, 2 et 4. Une urne U_2 contient 3 boules marquées 0, 3 et 4.
Une épreuve **(e)** consiste à prélever une boule de U_1 dont le numéro sera **«** a **»** et une boule de U_2 dont le numéro sera **«** b **»**. Après chaque épreuve, les deux boules tirées sont remises dans leurs urnes respectives. Au résultat d'une épreuve **(** a **,** b **)**, on associe l'application **s** du plan complexe dans lui-même qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z'=\alpha z$, avec
$$\alpha=\frac{1}{2}a\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}ab\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}ab\right)\right)$$
1-Définir géométriquement les applications associées aux résultats possibles de **(e)** .
2-Soit A le point d'affixe $1+i$ et A' son image par **s**, calculer les probabilités p_0 et p_1 des événements respectifs
e_0 : « les points O, A et A' sont alignés »
e_1 : « l'affixe de A' est imaginaire pur »
3-On considère la variable aléatoire X qui à chaque résultat d'une épreuve, fait correspondre la distance de O à A'. Déterminer la loi de probabilité de X, et calculer son espérance mathématique.

EXERCICE 18 :
Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.
Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète *n* fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du *n*-ième tirage.
1. Calculer les probabilités p_2 et p_3.
2. On considère les événements suivants :
B_n : «On tire une boule blanche lors du *n*-ième tirage »,
U_n : «On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».
a. Calculer la probabilité de l'événement B_n.
b. Exprimer la probabilité de l'événement U_n en fonction de *n*.
c. En déduire l'expression de p_n en fonction de *n* et vérifier l'égalité $p_n=\frac{n-1}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
3. On pose : $S_n=p_1+p_2+\cdots+p_n$
a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 2, on a : $S_n=1-\left(\frac{n}{2}+1\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
b. Déterminer la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 19 :
ABCD est un tétraèdre régulier. On désigne par I, J, K, L, N les milieux respectifs des arêtes [AD], [DC], [CB], [BA], [AC] et [BD].
1. a) Faire la figure.
b) Démontrer que IJKL est un carré et que la droite (MN) est orthogonale au plan (IJK).
2. Soit d_1 et d_2 les demi-tours d'axes respectifs (IK) et (JL), S la réflexion de plan (IJK). On pose $d=d_2\circ d_1$.
a) Déterminer deux réflexions S_1 et S_2 telles que : $d_1=S\circ S_1$ et $d_2=S_2\circ S$.
b) En déduire que d est un demi-tour dont on précisera l'axe.

EXERCICE 20 :
1. Calculer $A=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{cos^3x}{1-2sinx}dx$. (poser t=sinx).
2. Pour $\alpha>0$; $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{1}\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}dt$; $J(\alpha)=\int_{\alpha}^{1}\frac{1}{t^3}e^{-\frac{1}{t}}dt$
Calculer $\lim_{\alpha\to 0^+} I(\alpha)$ et $\lim_{\alpha\to 0^+} J(\alpha)$.
3. Soit la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ définie par $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$. On donne $f(x)=x^{-\frac{1}{3}}$, $x\geq 1$.
a) Calculer $I_n=\int_1^n f(x)dx$
b) Prouver que pour tout k∊{1 ; 2 ; …. ; n-1} ;
$f(k+1)\leq\int_k^{k+1} f(x)dx\leq f(k)$.
c) En déduire que $n\geq 2$, $S_n-1\leq I_n\leq S_n-n^{-\frac{1}{3}}$.
d) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^{\frac{2}{3}}}$.

EXERCICE 21 :
Dans le plan (P) muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère l'ensemble (Γ) des points M dont les coordonnées x et y vérifient la relation :
$(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}(x+y-4)^2$ (i)

1. a) Soit $M_0(x_0, y_0)$, calculer la distance du point M_0 au point A(1, 1), et la distance du point M_0 à la droite d'équation $x + y - 4 = 0$.

b) Déduire que (Γ) est une conique dont précisera un foyer F, la directrice associée (D) et l'excentricité e.

2. a) Montrer que l'égalité (i) est équivalente à
$3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8 = 0$.

b) Montrer que le point O est centre de (Γ) et préciser l'autre foyer ainsi que la directrice associée (D').

c) Déterminer une équation de l'axe focal (FF') et du petit axe (D_1)

d) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de (Γ) et de ces axes. Construire (Γ).

EXERCICE 22 :

ABC est un triangle équilatéral du plan affine tel que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

- $D = s_{(AC)}(B)$
- r est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en C.
- E, l'image de B par r

1. a) Donner en justifiant la nature précise du quadrilatère ABCD.

b) Démontrer que D est le centre de la rotation r.

c) Démontrer que C est le milieu du segment [AE].

2. A tout point M de [AB] distinct de A et B, on associe le point M' de [CE] tel que AM=CM'.

Démontrer que le triangle DMM' est équilatéral.

3. Soit G l'isobarycentre du triangle DMM' et s la similitude directe plane de centre D qui transforme M en G.

a) Donner le rapport et l'angle de s.

b) Démontrer que s(B)=C.

c) Construire le point A' image de A par s.

d) Démontrer que les points C, G et A' sont alignés.

EXERCICE 23 :

L'espace affine (E) est muni du repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

Soit f l'application affine de (E) dans lui-même qui à un point M(x, y, z) associe le point M'(x', y', z') tel que :

$$\begin{cases} 3x' = -x + 2y - 2z + 2 \\ 3y' = 2x + 2y + z - 1 \\ 3z' = -2x + y + 2z + 1 \end{cases}.$$

1. Démontrer que l'ensemble des points invariants de f est un plan (P).

2. Démontrer que (P) est le plan médiateur du segment [MM']. Donner la nature de f.

EXERCICE 24 :

Le plan P est muni du repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, f est l'application de P dans P d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que f admet un seul point invariant.

2. Soit z' l'affixe de M', image de M par f. Exprimer Z' en fonction de Z, et en déduire que f est une similitude directe à caractériser.

3. Soit (Γ) la courbe d'équation
$:13x^2 + 13y^2 + 10xy - 36 = 0.$

a) Justifier que l'image (Γ') de (Γ) par f est :
$9x'^2 + 4y'^2 - 36x' + 8y' + 4 = 0$.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ').

c) En déduire que (Γ) est une ellipse dont on précisera le centre, les foyers, les sommets et l'excentricité.

d) Construire (Γ') puis (Γ) dans le même repère.

EXERCICE 25 :

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = xe^{\frac{1-x}{2}}$ et soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

c) Tracer (C).

d) Montrer que pour tout réel x de $[0; 1]$, on a :
$0 \le f(x) \le 1.$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{n!2^{n+1}}\int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}}dx$ et $u_n = 1 + \frac{1}{1!2} + \frac{1}{2!2^2} + \cdots + \frac{1}{n!2^n}$

a) Donner la valeur de I_1 et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}$

b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \sqrt{e} - I_n.$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \le I_n \le \frac{1}{n(n!)2^{n+1}}$

(Ind : utiliser la question 1.d)

d) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 26 :

Soit n∈ℕ ; $\forall x > 0;\ \ h(x) = \int_0^1 t^n \sin(tx)\,dt.$

1. Prouver que $h(x) = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x u^n sinudu.$

2. Justifier que h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :
$xh'(x) + (n+1)h(x) = sinx.$

3. Pour n=2 ; trouver h(x) en fonction explicite de x.

EXERCICE 27 :

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note P_k la probabilité d'apparition de la face numérotée k lorsqu'on lance le dé.

Le dé est pipé de sorte que les nombres P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6 constituent dans cet ordre une progression géométrique de raison q=0,5.

1. Prouver que $P_1=\frac{32}{63}$. En déduire P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6.

2. Le dé est utilisé pour un jeu dont les conditions sont :
   - L'apparition d'une face portant un numéro pair fait gagner 200F ;
   - L'apparition d'une face portant un numéro impair fait perdre 300F.

Un joueur réalise trois lancers successifs. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur après ces trois lancers.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. (sous forme de fraction de même dénominateur)

b) Calculer l'espérance mathématique de X. (sous forme de fraction irréductible)

EXERCICE 28 :

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = e^x cosx$.

1. Montrer que pour tout réel x, $-e^x \le f(x) \le e^x$ et en déduire que la courbe représentative (C_f) de f admet une asymptote au voisinage de $-\infty$.

2. Etudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. (On justifiera que f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$)

3. Représenter (C_f) sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, on prendra $\|\vec{\imath}\| = 0{,}25\pi$ et $\|\vec{\jmath}\| = 2cm$

4. On pose $I_n = \int_0^\pi e^x cosnxdx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout n de $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi)=0$

b) A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que $I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1+n^2}$.

c) Montrer que : $|I_n| \le \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$ et en déduire la limite de la suite (I_n).

5. Soit (E) l'équation différentielle $y' - 2y - 1 = 0$ et (E') l'équation $y' - 2y = 1 - e^x sinx$, où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Dire en justifiant , si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

a) Si g est une fonction positive et si g est solution de (E) alors g est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $x \mapsto 3e^{2x} + \frac{1}{2}$ est une solution de (E).

c) La primitive F de f s'annule en 0 est solution de (E').

EXERCICE 29 :

On se propose de montrer que l'équation $x^3+x^2+x+1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Q}$. On suppose alors qu'il existe une solution $x = \frac{p}{q}$ avec PGCD(p; q) = 1 et q > 0.

1. Montrer que p et q vérifient la relation

$$p^3 + p^2q + pq^2 + q^3 = 0.$$

2. Montrer que q divise p^3 et conclure que q = 1.
3. Montrer que p = 1 ou p = -1 et conclure qu'un tel x n'existe pas.

EXERCICE 30 :

On donne la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ et la fonction $G : x \mapsto G(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$.

1. Etudier les variations de f. Tracer (Cf).

2. Prouver que G est impaire sur $\mathbb{R}$.

3. Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}$; calculer G'(x).

4. Démontrer que $\forall x > 0,\quad xf(2x) \le G(x) \le xf(x)$.
En déduire $\lim_{x\to+\infty} G(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} G(x)$.

5. Donner une valeur approchée de $G\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ par la méthode des rectangles en subdivisant $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right]$ en 10 intervalles de même amplitude.

6. Donner le tableau de variation de G.

7. Donner l'allure de la courbe G

EXERCICE 31 :

Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère l'application affine f du plan d'expression analytique

$$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y \end{cases}.$$

1. Donner la matrice de l'endomorphisme associé à f et en déduire que f est une transformation affine.

2. Donner l'écriture complexe de f et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

3. On considère l'ellipse (E) d'équation $4x^2 + y^2 = 1$; caractériser (E) et déterminer une équation de (E'), l'image de (E) par f.

4. Donner la nature et les éléments caractéristiques de (E '), puis construire (E) et (E'). (Unité :1cm)

5. Soit (D) le domaine plan limité par l'ellipse (E) et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$ .On fait tourner (D) autour de l'axe des abscisses ; on obtient un solide de révolution (S). Calculer le volume de (S).

EXERCICE 32 :

I-Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation :
PGCD(x ;y)+PPCM(x ;y)=y+9.

II- *En 1582, le pape Grégoire XIII fait élaborer un nouveau calendrier qui supprime 3 années bissextiles tous les 400 ans : sont donc bissextiles toutes les années divisibles par 4, sauf les années séculaires donc le millésime n'est pas divisible par 4 (1700, 1800, 1900 ne sont pas bissextiles, 1600 et 2000 le sont)*

1. Quel est le nombre de jours de l'année 2014 ?de l'année 2016 ?

2. Le 25 décembre 2012 était un mardi.
Donner la liste des années entre 2013 et 2038 pour lesquelles le 25 décembre sera un mardi.

3. Le 29 février 2012 était un mercredi. Quel sera le prochain 29 février qui tombera un mercredi ?

III-1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $31x - 20y = 7$, d'inconnues x et y.

2. Mr. NOUBISSI achète des chevaux et des bœufs. Il paie 155 euros par cheval et 100 euros pour chaque bœuf, et il trouve que les bœufs lui ont coûté 35 euros de plus que ne lui ont coûté les chevaux.
Combien cet homme a-t-il acheté de chevaux sachant qu'il a acheté entre 500 et 600 têtes de bétails ?

EXERCICE 33 :

Soit f la fonction définie sur $I = [0;+\infty[$ par :
$f(x) = ln(e^x + e^{-x})$.

1. Prouver que $f(x) = x + ln(1 + e^{-2x})$.
Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x)$.
Préciser l'asymptote oblique en +∞ de (Cf).

2. Etudier les variations de f.

3. Tracer (Cf) sur I.

4. Pour x∈I ; $F(x) = \int_0^x ln(1 + e^{-2t})dt$.

a) Justifier l'existence de F(x). Interpréter graphiquement F(x).

b) Déterminer le sens de variation de F.

c) Prouver que $\forall x \in I;\quad 1 - \frac{1}{x+1} \le \ln(1 + x) \le x$.

d) En déduire que : $\frac{1}{2}ln2 \le \lim_{x\to+\infty} F(x) \le \frac{1}{2}$

5. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t})\,dt$.

a) $h(t) = \ln(1 + e^{-2t})$. Etudier h et tracer sa courbe.

b) Prouver que $\ln(1 + e^{-2n-2}) \le u_n \le \ln(1 + e^{-2n})$.
Trouver $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

6. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$; n∈ℕ*

a) Prouver que $S_n = F(n); n \ge 1$.

b) On pose $l = \lim_{x\to+\infty} F(x)$. On admet que l existe. Justifier que (S_n) est convergente. Donner $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

EXERCICE 34 :

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2cm. M est le point d'affixe *z* , (Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que

$$|z - 1 - i| = \frac{1}{4}\,|z + i\bar{z} - 8(1 + i)|$$, (D) est la droite d'équation *x* + *y* – 8 = 0 et F le point de coordonnées (1 ;1)

1. Soit M' le projeté orthogonal de M sur la droite (D).
Montrer que l'affixe *z*' de M' est :

$$z' = \frac{1}{2}\,(z - i\bar{z} + 8(1 + i))$$

2. Calculer *z*' – *z* .

3.a) En déduire que (Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que MM' = 2MF .

b) En déduire que (Γ) est une ellipse dont on précisera le foyer et la directrice.

c) Préciser l'axe focal .

d) Vérifier que les points A(2, 2) et A'(−2, −2) sont deux sommets de (Γ) .

4.a) Construire dans le repère $(O;\ \vec{u},\vec{v})$ la droite (D), l'axe focal les points A, A' et F.

b) Déterminer géométriquement les deux autres sommets de (Γ).

c) Donner l'allure de (Γ).

EXERCICE 35 :

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves de la classe de Terminale C du
Collège selon leurs moyennes (arrondies à l'unité près) du 1 er trimestre.

Moyennes	8	9	10	11	12
Nombre de garçons	1	4	8	2	1
Nombre de filles	0	0	5	2	2

On représente le nom de chacun des élèves par un numéro de 1 à 25. On inscrit les 25
numéros sur des jetons indiscernables au toucher que l'on met dans un sac.
On tire successivement trois jetons en remettant Chaque fois le jeton tiré dans le sac.
Soit X la variable aléatoire réelle qui associe à chaque triplet de jetons tirés le nombre d'élèves ayant obtenu moyenne (arrondie à l'unité près) supérieure ou égale à 10.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
N.B : On donnera les résultats sous la forme de fraction irréductible.

EXERCICE 36 :

On considère dans ℕ*×ℕ*, l'équation (E) : $50x - 11y = 3$.
1. a. Quelles sont les valeurs possibles du PGCD des couples (x, y) solutions de l'équation E ?
b. Résoudre l'équation (E).
2. Soit n un entier naturel non nul, on pose :
a = 11n + 3 et b = 13n−1.
a. Montrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 50.
b. En s'inspirant de la question 1.b., déterminer les valeurs de n pour lesquelles le PGCD de a et b est égal à 50.
c. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le PGCD de a et b est égal à 25.

EXERCICE 37 :

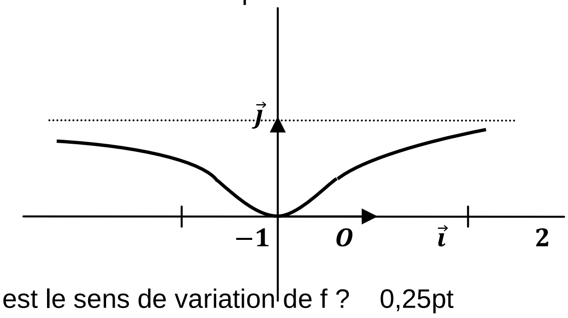
Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est :
$M_{(f,B)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.
1. Calculer en fonction de x, y et z les composantes x', y' et z' de $\vec{u} = f(\vec{u})$ où $\vec{u} = (x, y, z)$.
2. a) Déterminer Ker$f$ et Imf ainsi qu'une base caconique de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
b) f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
3. a) Montrer qu'il existe k∈ℝ* tel que pour tout $\vec{u}$ ∈Imf, $f(\vec{u}) = k\vec{u}$.
b) Montrer que l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :
pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $g(\vec{u}) = \frac{1}{k} f(\vec{u})$ est un projecteur vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 38:

Une urne contient n boules blanches et n boules noires indiscernables au toucher . Un joueur tire successivement avec remise six boules. S'il tire une boule blanche, il marque deux points sinon il perd trois points. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de points obtenus par le joueur au bout des six tirages.
1. a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X.
2. a) Déterminer la probabilité de l'événement $(|X - E(X)| \geq 9)$.
b) En déduire la probabilité de l'événement $(|X - E(X)| < 9)$.

EXERCICE 39 :

La courbe ci-dessous est celle de la dérivée d'une fonction f continue et dérivable sur ℝ et qui s'annule en 0.



1. a) Quel est le sens de variation de f ? 0,25pt
b) On suppose qu'il existe deux réels $\alpha,\ \beta$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \alpha + \frac{\beta e^x}{(1+e^x)^2}$
Déterminer α et β.
c) En déduire l'expression de f(x).
2. Dans la suite , on considère la fonction g définie dans ℝ par : $g(x) = x - 2 + \frac{4}{1+e^x}$
a) Dresser le tableau de variation de g.
b) Etudier les branches infinies de la courbe de g puis tracer cette courbe dans le plan muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
3. a) Calculer l'aire $A(\alpha)$ de l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x ;y) tels que : $\begin{cases} 0 \leq x \leq \alpha \\ x - 2 \leq y \leq g(x) \end{cases}$ $(\alpha > 0)$
4. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt$.
a) Calculer I_0 et à l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
b) Déduire une expression simple de I_n en fonction de n.

EXERCICE 40 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$. On désigne par r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$; r_C la rotation de centre C d'angle $\frac{\pi}{3}$; D et E sont les point tels que $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$.

1. Montrer que $r_C \circ r_B \circ r_A$ est la symétrie de centre B et préciser la position du point E.

2. s est la similitude directe plane de rapport $\frac{1}{2}$, d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et qui transforme A en B. Justifier que s(E)=D.

3. On note Ω le centre de la similitude s. Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE, puis construire Ω.

4. a) Montrer que l'image par s de la droite (AC) est la droite (CB).

b) Montrer que l'image par s du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD] puis en déduire que l'image de C par s est le point I, milieu de [DE].