Chapitre 2

LIMITES DE FONCTIONS

I . Généralités sur les fonctions.
II . Limite d'une fonction.
III . Limites et droites asymptotes.
IV . Limites par comparaison.

Augustin Cauchy (1789- 1857)
La définition actuelle de la limite d'une fonction en un point lui doit beaucoup

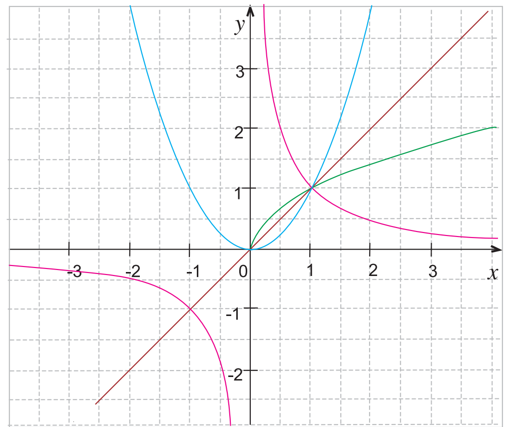
I. Généralités sur les fonctions

Activités préliminaires

Activité 1:

Ci-contre sont représentées les fonctions

$x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \sqrt{x}$



1) Indiquer la courbe de chacune d'elles.
2) Comparer ces fonctions.
3) Pour $x \geq 0$, démontrer que la courbe représentant la fonction $f(x) = x^2$ est symétrique de la courbe représentant la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ par rapport à la droite $\Delta : y = x$.
4) Quels sont les autres éléments de symétries ?

Activité 2:

Chaque question comporte une et une seule réponse correcte, laquelle.

1) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5(x-1)^3$ est :

☐ paire ☐ impaire ☐ ni paire ni impaire.

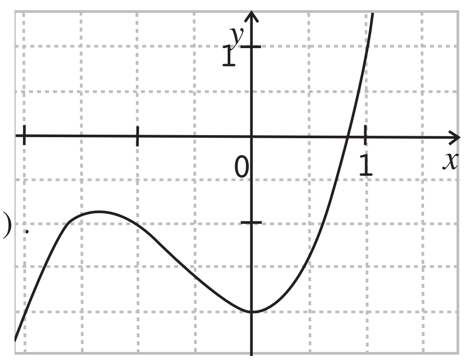
2) La fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ par : $g(x) = \dfrac{3x+4}{2x+1}$ est

☐ croissante ☐ décroissante ☐ ni croissante ni décroissante.

3) L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est :

☐ $\{-1;0\}$ ☐ $[-1;0]$ ☐ $\{0;1\}$ ☐ $[0;1]$

Activité 3 :



Cette courbe est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2;1]$.
1) Dresser le tableau de variation de f.
2) Lire graphiquement les valeurs de $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
3) Avec la précision permise par le dessin, résoudre les équations : $f(x) = -1$; $f(x) = x$.

Activités de découverte

Activité 1 :

On considére les fonctions

$f : \{0;1;2;3;...;10\} \mapsto \mathbb{R}$

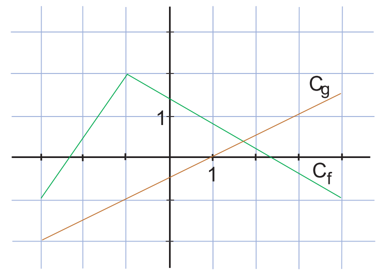
et

$g : \{0;1;2;3;....;10\} \mapsto \mathbb{R}$

définies par le tableau ci-contre.
Compléter ce tableau.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0	2	3	5	7	10	3	4	7	5	3
$g(x)$	0	1	1	2	3	1	4	2	5	3	8
$f(g(x))$											
$g(f(x))$											

Cours

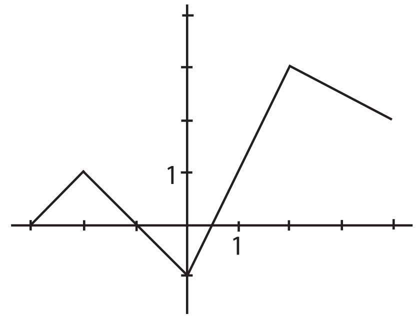


Activité 2:

Deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3;4]$, sont représentées ci-contre.
Représenter les fonctions :
$-f$; $3f$; $f+g$; $f-g$.

Activité 3:

Une fonction définie sur $[-3;4]$ est représentée graphiquement ci-contre. Pour chacune des fonctions suivantes :



$f_1(x) = -f(x)$, $f_2(x) = f(-x)$, $f_3(x) = -f(-x)$,
$f_4(x) = |f(x)|$, $f_5(x) = f(x+2)$
$f_6(x) = f(x) + 1$, $f_7(x) = 3f(x)$, $f_8(x) = f(2x)$.

1) Déterminer son ensemble de définition .

2) La représenter graphiquement.

Activité 4:

On donne ci-dessous le tableau de variation de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

En déduire le tableau de variations de la fonction fog sur $\mathbb{R}$.

A retenir

Composée de deux fonctions

Définition

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D et g une fonction dont l'ensemble de définition est $f(D)$. On appelle fonction composée de f et g, la fonction notée $g \circ f$ et définie pour tout $x \in D$, par : $(gof)(x) = g(f(x))$

Remarque :

fog est généralement différente de gof .

Sens de variation d'une composée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur l'ensemble $f(I) = \{f(x), \text{ où } x \in I\}$.

Théorème

Si f et g ont même sens de variation, alors gof est **croissante** sur I.
Si f et g ont des sens de variation contraires, alors gof est **décroissante** sur I.

Fonctions associées

Théorème admis

Soit C_f la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$

- La courbe C_g représentant la fonction g définie par $g(x) = f(x) + k$, k réel, est l'image de C_f par $t_{k\vec{j}}$.
- La courbe C_h représentant la fonction h définie par $h(x) = f(x+\lambda)$, λ réel, est l'image de C_f par $t_{-\lambda\vec{i}}$
- La courbe C_k représentant la fonction k définie par $k(x) = -f(x)$ est l'image de C_f par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
- La courbe C_l représentant la fonction l définie par $l(x) = f(-x)$ est l'image de C_f par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Applications

1 Soit f_1 et f_2 deux fonctions définies par $f_1 = x^2 - 1$ et $f_2(x) = \sqrt{x}$

1) Déterminer les domaines de définition de f_1 *et* f_2 .

2) a) Calculer, lorsque c'est possible : $f_1 o f_2 (3)$; $f_2 o f_1 (3)$; $f_1 o f_2 (0)$; $f_2 o f_1 (0)$ $f_1 o f_2 (-2)$; $f_2 o f_1 (-2)$.

b) Les domaines de définition de $f_1 o f_2$ *et* $f_2 o f_1$ peuvent ils être identiques?

3) Déterminer les domaines de définition de $f_1 o f_2$ et $f_2 o f_1$, ainsi q'une expression de ces fonctions.

2 Démontrer que la composée de deux fonctions affines est une fonction affine.

3 Ecrire la fonction f comme composée de deux fonctions connues et en déduire son sens de variation dans chacun des cas suivants :

a) f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; b) f définie sur $[-2;2]$ par $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

4 Soit $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Vérifier que $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x-1}$. En déduire le tableau de variation de la fonction f. Préciser la transformation utilisée.

5 Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x) = 2x^2 - 1$ et $g(x) = 4x^3 - 3x$
Vérifier que l'on a : $(fog)(x) = (gof)(x)$

6 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et C_f sa courbe représentative dans un repére $(O;\vec{i},\vec{j})$. Représenter dans le même repère les fonctions suivantes :

$g(x) = \sqrt{x} + 3$; $h(x) = \sqrt{x-2}$; $k(x) = \sqrt{-x}$

II. Limite d'une fonction.

Activités préliminaires

Activité 1

1) Déterminer la limite des fonctions suivantes quand x tend vers $+\infty$:

$$x \mapsto \sqrt{x};\quad x \mapsto x;\quad x \mapsto x^2;\quad x \mapsto x^n (n \in \mathbb{N}^*)$$

2) Déterminer la limite des fonctions suivantes quand x tend vers $+\infty$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\ ;\quad x \mapsto \frac{1}{x}\ ;\quad x \mapsto \frac{1}{x^2}\ ;\ x \mapsto \frac{1}{x^n}(n \in \mathbb{N}^*))$$

3) Donner un exemple de fonction qui n'admet pas de limite en $+\infty$

Activité 2:

Etudier la limite de la fonction f en l'endroit indiqué :

a) $f(x) = 8x^3 + 2x^2 + 1$ en $+\infty$; $-\infty$ et 0. b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ en $+\infty$; $-\infty$ et 1.

Activité 3:

Déterminer les limites suivantes (on justifiera les réponses).

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x} + 2x + 3)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3\sqrt{x} + x^2)$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{-5}{x} + x^2)$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\frac{1}{x} + 3x^2 - 2)$ e) $\lim\limits_{x \to 2^+} (\frac{3}{x - 2} + 5x + 7)$ f) $\lim\limits_{x \to 2^+} (\frac{2}{x + 2} + \frac{1}{2})$

Activité 4:

Dans chaque cas, tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}\ , \vec{j}\ )$, une courbe représentant une fonction f vérifiant les conditions suivantes :

1) f est définie sur $]-1;+\infty[$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$; $f(0) = -3$

2) f est définie sur $[0;3[$ et sur $]3;+\infty[$;

$f(0) = 2$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Activités de découverte

Activité 1:

1) Les théorèmes vus, permettent-ils de calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x})$?

Montrer que, pour tout $x > 0$, $x - \sqrt{x} = x\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, en déduire cette limite.

2) Déterminer la limite éventuelle de $f(x)$ au point a , après avoir éventuellement simplifié.

a) $f(x)=\dfrac{3x^2-8x^3}{x^2}$, $a=0$, b) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$, $a=-2$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$, $a=0$ d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}}$, $a=0$

e) $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x-3}$, $a=3$ f) $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$ $a=+\infty$

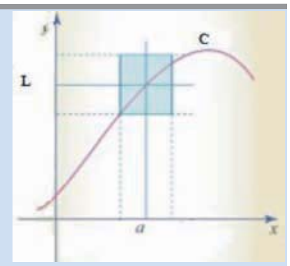
Activité 2 :

1) Ecrire $u: x \mapsto \sqrt{1+x+x^2}$ sous la forme gof , puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.
2) Déterminer la limite éventuelle de *f* au point considéré.

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$ en $+\infty$; b) $f(x)=\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$;

3) Plus généralement, a,b,l sont chacun un réel ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$, si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y)=l$, quelle conjecture peut-on faire à propos de $\lim\limits_{x\to a} gof(x)$?

A retenir



Limite finie en *a* (*a* réel)

Définitions

1) Considérons une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a (sauf peut - être en a) et L un réel.
Une fonction f a pour limite L lorsque x tend vers a, si pour tout intervalle ouvert J contenant L , il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que si $x \in I \setminus \{a\}$, $f(x) \in J$.
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{a} f=L$

2) Considérons une fonction définie sur un intervalle ouvert de la forme $]a,b[$ et L un réel.
Une fonction *f* a pour limite L à droite en a si pour tout intervalle ouvert J contenant L, il existe un réel $\alpha > a$ tel que si $x \in]a,\alpha[$, $f(x) \in J$
On note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{a^+} f=L$

3) Considérons une fonctions définie sur un intervalle ouvert de la forme $]b,a[$ et L un réel.
Une fonction *f* a pour limite L à gauche en a si pour tout intervalle ouvert J contenant L, il existe un réel $\alpha <$ a tel que si $x \in]\alpha,a[$, $f(x) \in J$.
On note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{a^-} f=L$

Remarques

- Si une fonction admet une limite en a, cette limite est unique
- $(\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L) \Leftrightarrow (\lim\limits_{x\to a} f(x)=L)$

Théorème

1) f étant une fonction polynôme ou l'une des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, ou encore la somme, le produit, le quotient ou la valeur absolue de telles fonctions, si f est définie en a , alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ où a est un réel .

2) Si, pour $x \neq a, f(x) = g(x)$, où g est une fonction définie en a et telle que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$ alors f admet une limite en a, et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$.

Limite en $+\infty$ ou $-\infty$

Théorème

A l'infini, une fonction polynôme a même limite que son terme du plus haut degré.
A l'infini, une fonction rationnelle a même limite que le quotient simplifié de ses termes du plus haut degré.

Opérations sur les limites

Nous rappelons ci-dessous les résultats algébriques qui nous renseignent, dans certains cas, sur la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.
Dans chaque cas, il s'agit de limites au même point a (a réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).

Théorème

1) Limite d'une somme

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en a , la fonction $f + g$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-contre.

$\lim\limits_{x \to a} f$ \ $\lim\limits_{x \to a} g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

2) Limite d'un produit

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en a , la fonction $f.g$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-contre.

$\lim\limits_{x \to a} f$ \ $\lim\limits_{x \to a} g$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \neq 0$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ on ne peut conclure.

A retenir

3) Limite d'un quotient

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en a, la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau ci-contre.

$\lim_{x \to a} f$ \ $\lim_{x \to a} g$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0
$+\infty$	$\pm\infty$	?	?
$-\infty$	$\pm\infty$	?	?

Remarque

Si $\ell' = 0$, on ne peut conclure que lorsque g garde un signe constant au voisinage de a.
Les situations marquées ? sont appelées **formes indéterminées.**

Limite d'une fonction composée :

Théorème

a, b, l sont chacun un réel ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{y \to b} g(y) = l$, alors $\lim_{x \to a} gof(x) = l$

Applications

1 Cocher la seule bonne réponse

a) $\lim_{x \to +\infty} (x - 3 - \frac{1}{x}) =$ ○ $+\infty$ ○ 0 ○ $-\infty$

b) $\lim_{x \to 0^-} (-x + 4 + \frac{2}{x})$ ○ $+\infty$ ○ 0 ○ $-\infty$

c) $\lim_{x \to 3^+} \frac{2x - 7}{x - 3}$ ○ $+\infty$ ○ 0 ○ $-\infty$ ○ 2

2 On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, avec $f(x) > 0$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x) = -2$. Alors

a) $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) =$ ○ $+\infty$ ○ $-\infty$ ○ 0 ○ on peut pas le savoir.

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) \times g(x) =$ ○ $+\infty$ ○ $-\infty$ ○ 0 ○ on peut pas le savoir.

c) $\lim_{x \to +\infty} h(x) \times g(x) =$ ○ $+\infty$ ○ $-\infty$ ○ 2 ○ on peut pas le savoir.

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{f(x)} =$ ○ $+\infty$ ○ $-\infty$ ○ 0 ○ -2

3 Trouver toutes les bonnes réponses.
Les fonctions u et g sont connues par les tableaux suivants.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	↘	3	↘	-1	↗	2

x	$-\infty$		-2		5		2		3		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

On considère la fonction $f = g \circ u$

Soit la fonction u dont le tableau des variations est donnée ci-dessous.

◯ $f(-2) = 0$ ◯ $f(-2) = 1$ ◯ $f(5) = -1$ ◯ $f(2) = 0$

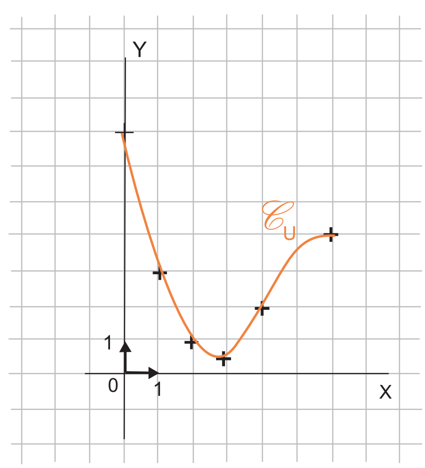
◯ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ◯ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ◯ $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$

4

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$u(x)$	4	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	-2

Etablir le tableau des variations complet de la fonction $\frac{1}{u}$. Pourquoi peut-on dire que le point $E\,(2\,;0)$ est exclu de la courbe de la fonction $\frac{1}{u}$.

5 On considére la fonction u définie sur $[0;6]$ et représentée par la courbe C ci-contre.
Le minimum de u est 0,5 pour $x = 3$.
1) Dresser le tableau des variations de la fonction u.
2) Etudier le sens de variation de la fonction $f = gou$ et dresser son tableau des variations où g est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$



III. Limites et droites asymptotes.

Activités préliminaires

Activité 1 :

1) Réduire au même dénominateur en indiquant les valeurs interdites.

a) $2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}$, b) $\frac{2x-1}{x^2}+x-1$, c) $x-3+\frac{4}{x^2-1}$, d) $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}+1$

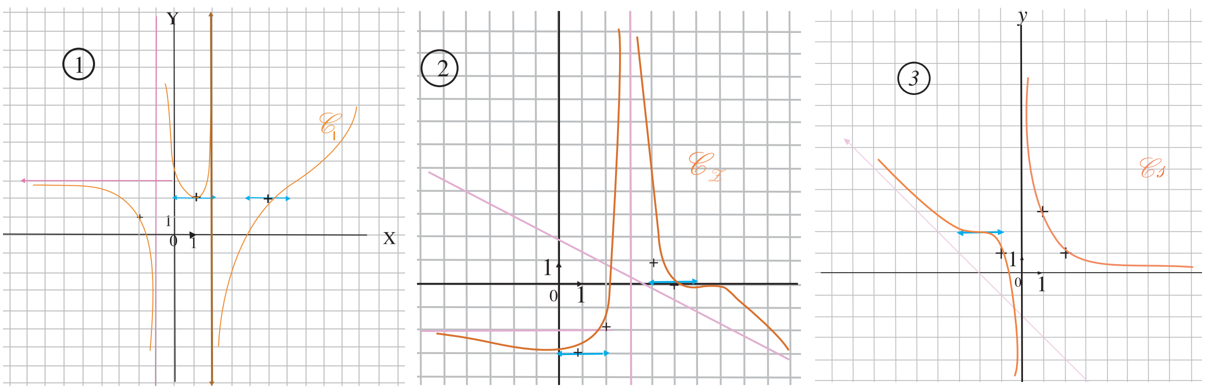
2) Déterminer a ,b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$; $\frac{4x^2-9x}{x-2}=ax+b+\frac{c}{x-2}$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{-x^3+3x^2-x-1}{x^2+1}$

Déterminer les réels a,b et c tels que : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x^2+1}$

Activité 2 :

Chaque courbe ci-dessous est celle d'une fonction f



1) Pour chaque fonction, lire son ensemble de définition, son tableau de variation.
2) Compléter le tableau obtenue par les limites aux bornes de l'ensemble de définition

Activités de découverte

Activité 1 :

Soit f une fonction ayant le tableau des variations ci-contre.
Interpréter, graphiquement, chaque limite et tracer une allure possible de la courbe représentant cette fonction.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	-3	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

Activité 2 :

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{-x^3+2x^2-x-2}{x^2-1}$.

Soit D la droite d'équation $y=-x+2$, et C la courbe représentative de la fonction f.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x-2)$. En donner une interprétation graphique.

2) Etudier la position relative de C par rapport à D sur l'intervalle $]1;+\infty[$

3) Etudier la limite de f en 1. En donner une interprétation graphique.

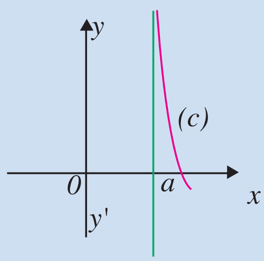
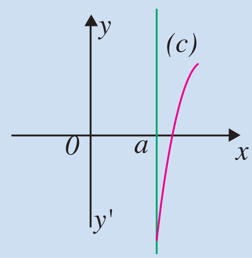
A retenir

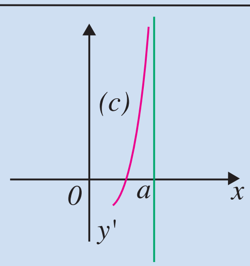
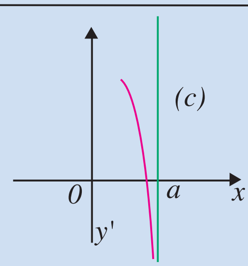
Asymptote verticale

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de borne a et C sa courbe représentative.

Définition

Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale pour la courbe C

Si $\lim\limits_{a^+} f = +\infty$	Si $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$
	

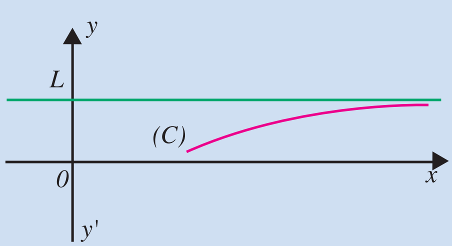
Si $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$	Si $\lim\limits_{a^-} f = -\infty$
	

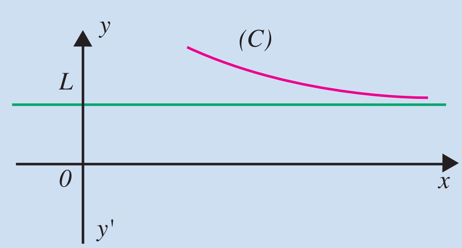
Asymptote horizontale

Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$ et C sa courbe représentative.

Définition :

Si la limite de $f(x)$ est un nombre L, quand x tend vers $+\infty$, (ou $-\infty$), alors la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à C en $+\infty$ (ou $-\infty$)



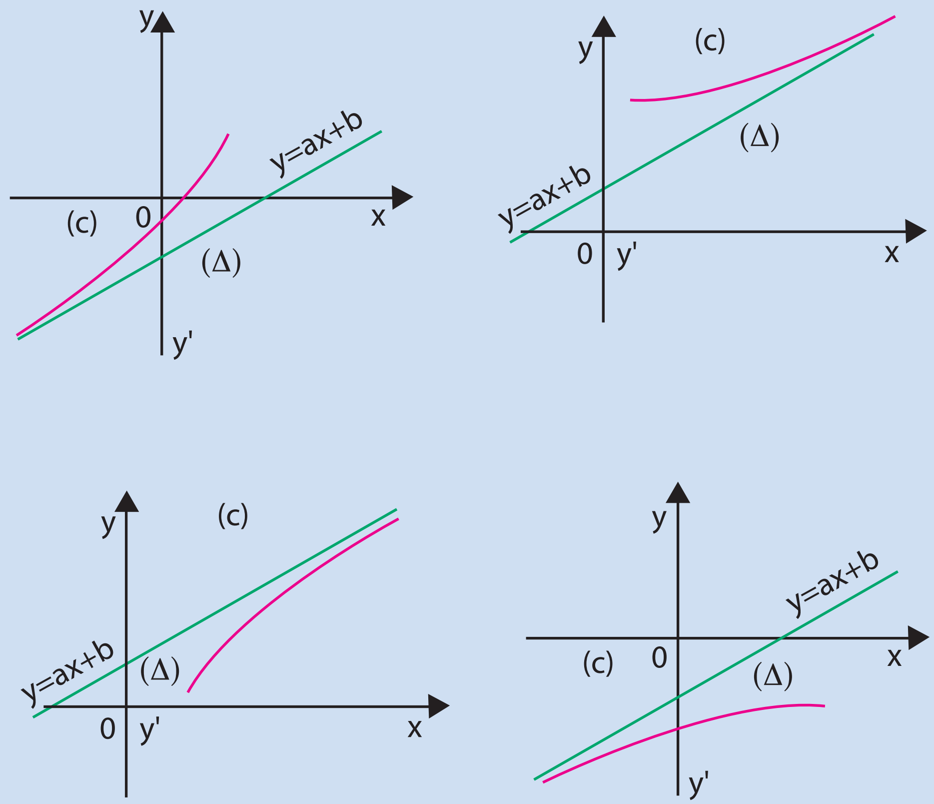


Asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$, C sa courbe représentative et D une droite d'équation $y = ax + b$ dans un repère ($a \neq 0$)

Définition :

Si la limite de la différence $f(x)-(ax+b)$ est nulle quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C en $+\infty$ (ou $-\infty$).



Méthode

1) Pour avoir une asymptote verticale, la valeur interdite ne suffit pas : il faut aussi que, en cette valeur, la limite à droite ou à gauche soit infinie.

2) a- Pour montrer qu'une droite donnée d'équation $y = ax+b$ (avec $a \neq 0$) est asymptote oblique ; on calcule la différence $d(x) = f(x) - (ax + b)$; on étudie la limite à l'infini de $d(x)$ et on doit trouver 0.

b- Pour étudier la position relative de C et de D, on étudie le signe de $d(x)$.

Applications

1 Soit f une fonction ayant le tableau des variations ci-aprés. Interpréter, graphiquement, chaque limite et tracer une allure possible de la courbe de f.

x	$-\infty$			1					$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$-\infty$	‖	0	↘	-1	↗	2

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+7}{x+1}$ et D la droite d'équation $y = -x+3$

1) Montrer que D est asymptote à C représentant f en $+\infty$.

2) Etudier la position relative de C par rapport à D

2 IV. Limites par comparaison.

Activité 1:

Activités de découverte

Soit $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Démontrer que, pour tout réel x, $g(x)\geq\dfrac{1}{x^2}$.

Peut-on, alors, calculer la limite de g en 0 ?

Activité 2:

Considérons une fonction croissante sur un intervalle $I=[a;b]$.

Montrer que, pour tout x de I on a : $f(a)\leq f(x)\leq f(b)$. En déduire que f est bornée sur I.

Activité 3:

Soient f, u *et* v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ ($a\in\mathbb{R}$).

1) Démontrer que, si pour tout réel x assez grand, on a $f(x)\geq u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) Démontrer que, si pour tout si pour tout réel x assez grand, on a $f(x)\leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

Activité 4:

Soient f et u deux fonctions définies sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ (a réel).

Démontrer que, si pour tout réel x assez grand, on a $|f(x)-\ell|\leq u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$

A retenir

Théorème 1

Soient f et g deux fonctions définies sur le même intervalle I. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ et si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

Théorème 2

Soient f, u et v des fonctions admettant des limites en un réel a.
Si pour tout réel x assez proche de a, on a : $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = \ell$ alors la fonction f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

Conséquence

Soient f et g deux fonctions définies sur le même intervalle I. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ et si pour tout $x \in I$, $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

Ces résultats s'étendent aux limites en $-\infty$, $+\infty$, a^+ et a^-

Applications

$\boxed{1}$ Soit $h : x \mapsto \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$

1) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif :

$h(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+1} - 1\right)$; pouvez-vous en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$?

2) Vérifier que les trois relations suivantes sont vraies pour tout x de $\mathbb{R}^*_+$

$0 < h(x) < \sqrt{x+1}$; $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$; $0 < h(x) < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Dire celles qui permettent de déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ déterminez cette limite

$\boxed{2}$ Déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sin x$

$\boxed{3}$ Déterminer la limite en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$

$\boxed{4}$ Une fonction f est telle que, sur $]0;+\infty[$, on a : $\dfrac{3x+4}{x+2} \leq f(x) < 3 + \dfrac{1}{x}$
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$\boxed{5}$ Corriger les réponses fausses.

Les fonctions h et g sont données par leurs courbes respectives C et C'.
On donne des informations sur la fonction f.

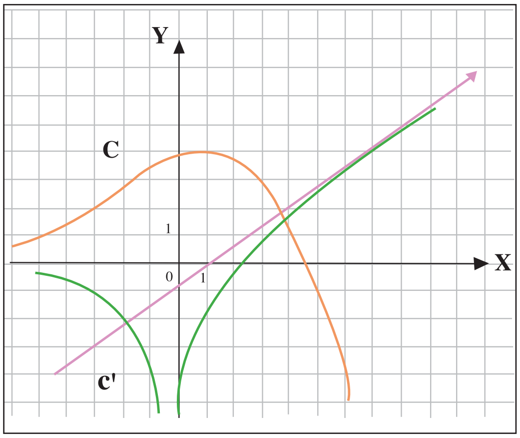
a) Si $f(x) \leq h(x)$ sur $]0;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b) Si $f(x) \leq g(x)$ sur $]0;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

c) Si $f(x) \geq g(x)$ sur $]-\infty;0[$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

d) Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur $]-\infty;0[$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

e) Si $f(x) \geq g(x)$ sur $]0;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



Apprendre à chercher

Situation 1 : Etudier la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x} - x$.

Point méthode

Dans le cas de telles fonctions, il est parfois efficace d'utiliser la technique de multiplication par l'expression conjuguée, lorsque les théorèmes usuels ne permettent pas de conclure directement

Vérifier que, pour $x > 0$ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$ puis $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}$; déduire, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et l'interpréter graphiquement.

Le théoréme sur les limites des fonctions composées et le théoréme donnant la limite d'une somme donnent $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ .Par ailleurs, $f(x)+2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$. Achever ce calcul et trouver l'asymptote au voisinage de $-\infty$

Situation 2 :

f est la fonction définie sur IR par $f(x) = \sqrt{2x^2+x+1}$, C est la courbe représentative de f dans un repère donné. Démontrer que, C admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

Une solution repose sur la remarque suivante : ce qui gène, c'est la présence de x, car si , $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$ intuitivement, « pour les grandes valeurs de x, $f(x)$ se comporte comme $\sqrt{2x^2} = (\sqrt{2})x$ et donc $y = \sqrt{2}x$ est asymptote ». prouvez-le. L'idée, alors, est d'écrire f sous la forme : $\sqrt{aX^2+b}$. Pour cela : écrire le trinome $2x^2 + x + 1$ sous la forme canonique, puis déduire que, pour tout x $f(x) = \sqrt{2(x+\dfrac{1}{4})^2+\dfrac{7}{8}}$.

Prouver, enfin, que la droite d'équation $y = \sqrt{2}(x+\dfrac{1}{4})$ est asymptote à C.

Situation 3 :

f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x+19}-5}$

1) Déterminer le domaine de définition D de f.
2) Etudier la limite de f en 3. Conclure.

Vers une solution

2) Montrer que pour tout x de D, $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+19}+5}{2\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$ (on multiplie le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ par l'expression conjuguée $\sqrt{x+1}-2$ puis par l'expression conjuguée $(\sqrt{2x+19}-5)$.

Fonction composée et limites sous GEOPLAN

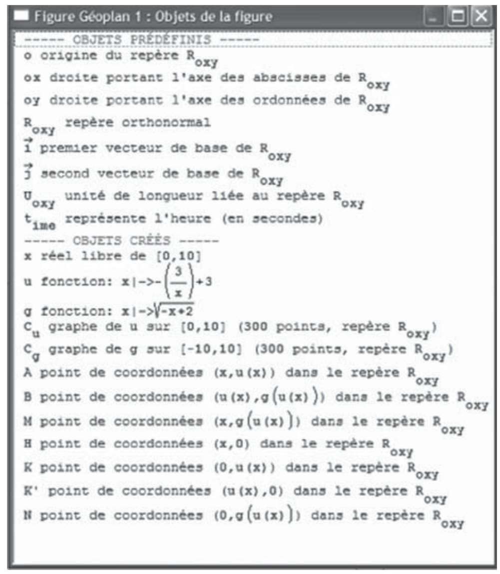
On considère la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $u(x) = -\dfrac{3}{x} + 3$ de courbe C_u dans un repère du plan.

Travail sur papier

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4 - x^2$ de courbe C_g et $f = g \circ u$.

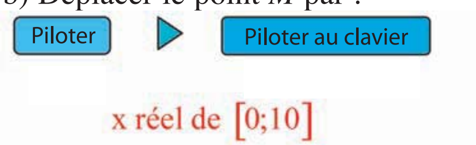
Sans calculer $f(x)$, établir le sens de variation de f sur $\left]0;+\infty\right]$ à l'aide des fonctions composées.

Création et interprétation de la figure sous GEOPLAN



a) Créer la fonction u et la fonction g ainsi que leurs courbes C_u et C_g et les points A, B et M dans le repère Roxy .

b) Déplacer le point M par :



et utiliser les fléches du clavier.

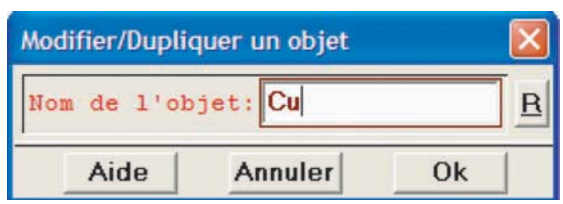
Vérifier que la composée est bien définie sur $\left]0;3\right]$.

c) Où se trouve le point A quand $x = 3$? Donner les coordonnées de A, de B et de M quand $x = 1$; puis quand $x = 2$.

d) Quand x est proche de 0, que devient l'ordonnée de A ? L'ordonnée de B ? L'ordonnée de M ?

Pour aller plus loin

Modifier la fonction u en cliquant sur M D puis u ; entrer $u(x) = 11 - x^2$.



On modifie les bornes du tracé de la courbe C_u :

on modifie le réel x : M D x et choisir les mêmes bornes

a) Par lecture graphique, donner le tableau complet des variations de la composée $g \circ u$

b) Démontrer tous les éléments du tableau trouvé.

Exercices et problèmes

1 **Q.C.M.** Trouver toutes les bonnes réponses.
Une fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Soit C sa courbe représentative dans un repère $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j}\ )$ On connait son tableau de variation.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

a) Pour tout réel x de $]-\infty;2[$ $f(x)\geq -2$.
b) Dans $[-1;1]$, l'équation admet une unique solution $f(x)=-1$
c) $f(0) > 0$; $f(5) < 0$.
d) La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C.

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$; **f)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$

g) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=+\infty$; **h)** $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$

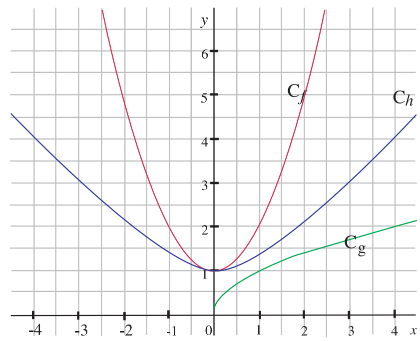
2 Les fonctions f et g de la variable réelle x sont toutes deux croissantes sur l'intervalle $[-1;1]$
1) Est-il vrai que la somme f +g de ces deux fonctions est également croissante ?
Si oui, le démontrer ; si non, donner un contre-exemple.
2) Est-il vrai que le produit $f \times g$ de ces deux fonctions est également croissante ?
Si oui, le démontrer ; si non, donner un contre-exemple.

3 Deux fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, f est croissante sur $\mathbb{R}$ et g est décroissante sur $\mathbb{R}$
Peut-on déduire le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de :
a) la fonction $g \circ f$?
b) la fonction $f \times g$? si la réponse est oui, énoncer puis démontrer le résultat. Si la réponse est non, expliquer pourquoi en s'appuyant éventuellement sur un contre exemple.

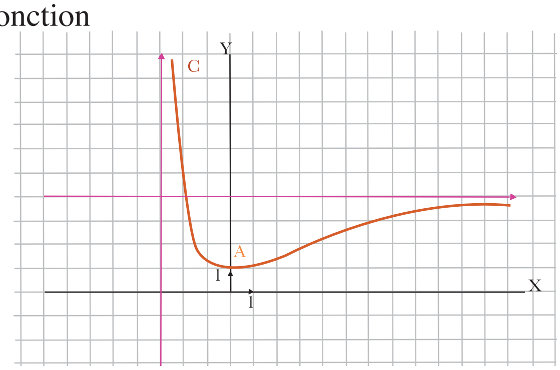
4 On pose $f_0(x)=1-\dfrac{1}{x}$ pour $x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$ et $f_n(x)=f_0\left[f_{n-1}(x)\right]$ pour $n\in\{1;2;3;4...\}$

calculer $f_{2007}(2007)$

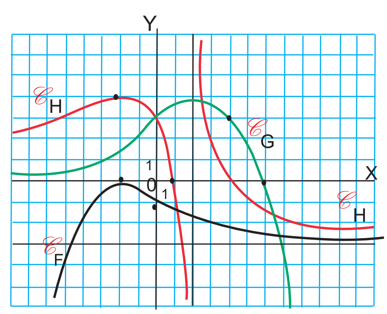
5 Ci-dessous les courbes représentants les fonctions : $f(x)=1+x^2$ et $g(x)=\sqrt{x}$
On a construit la courbe représentant leur composée h. Reconnaitre cette fonction et préciser son sens de variation.



6 La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-3;+\infty[$.
Dresser le tableau des variations de cette fonction



7 On considére les fonctions f, g et h connues par leurs courbes représentatives ci-dessous.



1) Préciser les limites de $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2) Lorsque cela est possible, donner les limites en $+\infty$ de: $f+g$; $f+h$; $g+h$; $f \times g$; $f \times h$; $g \times h$.

3) Donner les limites en $-\infty$ et, si elle existent, de : $f+g$; $g+h$; $f \times g$; $f \times h$; $g \times h$.

4) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$, si cela est possible, de $\frac{f}{g}$; $\frac{h}{g}$; $\frac{f}{h}$; $3+\frac{1}{f}$; $2h-\frac{1}{g}$

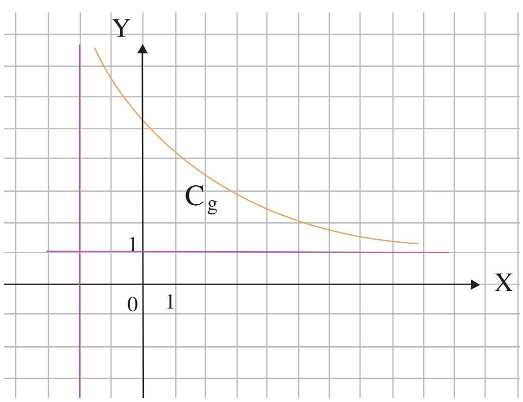
8 Etudier les limites des fonctions suivantes au point considéré.

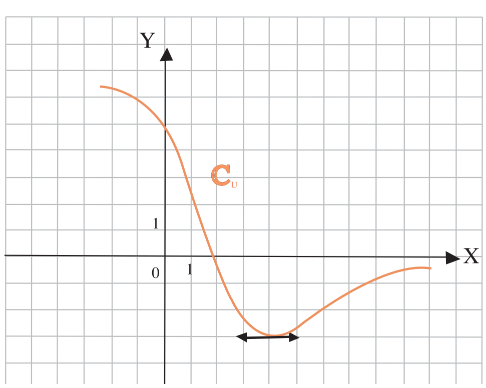
a) $f : x \mapsto \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$ en $+\infty$

b) $g : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+9}-3}$ en 0

c) $h : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1} - x$ en $+\infty$

9





On considère les fonctions u et g représentées ci-dessus par les courbes C_u et C_g.

1) Dresser le tableau des variations de u et g .

2) a) Justifier que la composée $f = gou$ est définie sur : $]-\infty;3[\cup]5;+\infty[$.

b) Etudier le sens de variation de f.

c) Déterminer $(gou)(2)$ et $(gou)(0)$.

3) a) Lire graphiquement les limites suivantes $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

$\lim\limits_{x \to 3^-} u(x)$ et $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$

$\lim\limits_{x \to 5^+} u(x)$ et $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

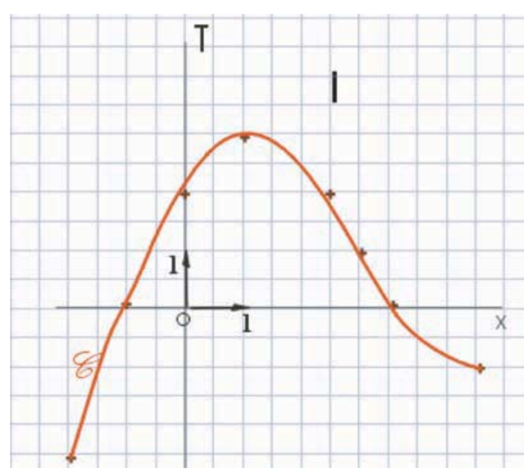
b) Que peut-on prévoir pour les limites de f ?

10 Etudier les limites en $+\infty$ des fonctions:

a) $f : x \mapsto 2x - 5x^3$; **b)** $g : x \mapsto \dfrac{3+2x}{x^2-3}$

c) $h : x \mapsto \dfrac{x^3 - x + 1}{8x^2 - 1}$; **d)** $k : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}+2x}{1-5x}$

11 Une fonction u est donnée par la courbe $\mathscr{C}$.



1) a) Résoudre l'équation $u(x) = -x + 4$.

b) Résoudre l'inéquation $u(x) < 0$.

c) Dresser le tableau des variations de cette fonction et indiquer le signe de $u(x)$.

2) On considère la fonction g connue par son tableau des variations :

t	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$g(t)$	3	↘	2	↘	0	↗	$+\infty$

Déterminer le sens de variation de la composée $f = gou$ définie sur $]-\infty;5[$.

12 On pose $f(x) = \dfrac{(50+x^{20})^2 - 2500}{x^{20}}$

a) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de $(50+x^{20})^2$, puis de $f(x)$ pour :
$x = 0{,}6$; $0{,}5$; $0{,}4$; $0{,}3$; $0{,}2$; $0{,}1$ et $0{,}01$.
Peut-on conjecturer la limite de *f* en 0 ?
b) En développant $(50+x^{20})^2$, simplifier l'expression de $f(x)$, pour $x \neq 0$. Calculer alors la limite de *f* en 0.
c) Vaincre la tentation de se débarrasser de la calculatrice.

13 Soit *f* la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par
$f(x) = \dfrac{-x^2+3x}{x-2}$

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b) Déterminer les réels a , b et c tels que,sur $]2;+\infty[$: $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$
Déduire que la courbe C représentant la fonction f , admet la droite D d'équation $y = -x+1$ comme asymptote oblique en $+\infty$.
c) Déterminer la limite de *f* en 2. En donner une interprétation graphique

14 Dans un repère orthonormé, tracer une allure de la courbe C d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ telle que :
a) C a une asymptote verticale d'équation $x = 2$.
b) C a une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 3$.
c) C a une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = -1$.
d- *f* est croissante sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$
e) L'équation $f(x) = 0$ a pour ensemble de solutions $\{0;5\}$

15 Une courbe C est la représentation d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = a + \dfrac{bx+c}{x^2+4}$
la courbe C passe par les points $A(0;-1)$ et $B(1;1)$. Au point A, la tangente à C est paralléle à la droite D d'équation $y = -x$.
1) Déterminer les réels a, b et c.
2) Déterminer la limite de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$
En donner une interprétation graphique.
3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

16 Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
par $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$
1) Déterminer les limites aux bornes des intervalles de son domaine de définition.
2) Préciser les asymptotes à la courbe C représentant *f* dans un repére orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
3) Montrer que le point $\Omega(2;1)$ est un centre de symétrie de C. Donner l'équation de la courbe C dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ puis la construire.

17 On considére les deux fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-2,0\}$ par :

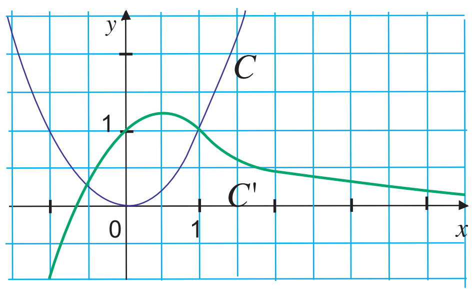
$f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+2}$

1) Etudier les limites de *f* et de *g* aux bornes de leur ensemble de définition. En déduire que les courbes représentatives C_f et C_g ont les mêmes asymptotes.

2) Soit $\Omega(-1;0)$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, montrer que Ω est un centre de symétrie de C_f et $(\Omega, \vec{j})$ axe de symétrie de C_g

3) Ecrire les équations de C_f et C_g dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

18 C et C' sont les courbes respectives de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.



1) Si h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on a $h(x) \geq f(x)$ que peut-on en déduire pour les limites de h en $+\infty$ et $-\infty$?

2) Si k est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on a $k(x) \leq g(x)$, peut-on en déduire les limites de k en $+\infty$ et $-\infty$? Si oui, les donner.

19 On considére les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]-1;+\infty]$ par : $f(x) = \sqrt{1+x}$ et

$$g(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

1) Montrer que $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$

pour $x \in [-1;+\infty[$

2) Calculer $(f(x))^2$ et $(g(x))^2$ puis comparer

$(f(x))^2$ et $(g(x))^2$ pour tout $x \in [-1;+\infty[$

3) Déduire une comparaison de f et g sur l'intervalle $[-1;+\infty[$

4) Tracer sur un même repère les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle $[-1;+\infty[$

5) Comparer les nombres suivants :

$A = 1{,}0000002$ et $B = \sqrt{1{,}0000004}$

20 **1)** Quel est le plus grand des deux nombres

suivants : $A = \dfrac{1{,}0000002}{1{,}0000004}$ et $B = \dfrac{0{,}9999996}{0{,}9999998}$

2) Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1+2x}{1+4x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1-4x}{1-2x}$$

a) Que vaut $f(10^{-7})$ et $g(10^{-7})$?

b) Démontrer que pour $x \neq \dfrac{1}{2}$ et $x \neq \dfrac{-1}{4}$,

$$f(x) - g(x) = \frac{12x^2}{(1+4x)(1-2x)}$$

c) Résoudre l'inéquation : $f(x) - g(x) > 0$. Quel est, alors, le signe de:

$$f(10^{-7}) - g(10^{-7}) \ ?$$

3) Comparer les nombres A et B.

L'asymptote : une notion en évolution

Michel Eyquem de Montaigne

Donner une définition du mot asymptote n'est pas une chose simple. Les premières rencontres avec la notion en soulignent le caractére à priori paradoxal.
Dans les Essais (II, 2), Montaigne rapporte ainsi les travaux de Jacques Peletier (1517 - 1582), un érudit proche de Ronsard et de la Pléiade : «Jacques Peletier me disait chez moi qu'il avait trouvé deux lignes s'acheminant l'une vers l'autre pour se joindre, qu'il vérifiait toutefois ne pouvoir jamais, jusques à l'infinité, arriver à se toucher.»

«Les Essais» de Montaigne

L'interdiction du contact ayant progressivement disparu, l'idée générale qui subsiste de nos jours est celle de proximité locale entre deux courbes.