Chapitre 10

NOMBRES COMPLEXES

I . Définition et propriétés
II . Représentation géométrique d'un nombre complexe
III . Conjugué d'un nombre complexe
IV . Module d'un nombre complexe
V . Equations dans $\mathbb{C}$

Cardan Girolamo (Jérôme)
1501-1576

I. Définition et propriétés

Activités préliminaires

Activité 1 :

1) Calculer $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

2) Ecrire alors sous la forme $a+b\sqrt{3}$ les réels suivants $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ et $\frac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ où a et b sont deux nombres rationnels.

Activité 2 :

Résoudre dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x+1=0$, $2x+1=0$, $x^2-2=0$.

Activités de découverte

Activité 1:

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2+1=0$

➢ L'équation $x^2+1=0$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{R}$.

- On suppose qu'il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$, appelé ensemble des nombres complexes, et dans lequel l'équation $x^2+1=0$ admet une solution.

Cette solution notée i n'est pas un nombre réel; c'est **un imaginaire pur**.

- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a+ib$ où a et b sont deux réels et $i^2=-1$
- On définit dans $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication ayant les mêmes propriétés que celles définies dans $\mathbb{R}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $x^2+a=0$ où a est un réel donné strictement positif.

Activité 2 :

1) Soient $z=2-3i$ et $z'=1+i$.
   Ecrire sous la forme $x+iy$ (x et y des réels) : $3z$; $z+z'$; $z-z'$; zz'

2) Soient $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ où a, b, a' et b' sont des réels.
   Ecrire sous la forme $x+iy$ (x et y des réels) : $z+z'$; $z-z'$; $z.z'$

3) a) Calculer : $(1+i)(1-i)$

   b) Ecrire alors $\frac{1}{1+i}$ et $\frac{2-3i}{1+i}$ sous la forme $x+iy$ (x et y des réels)

4) Soient $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ où a, b sont des réels et a', b' sont des réels non nuls.
   a)Vérifier que : $(a'+ib')(a'-ib')=(a')^2+(b')^2$
   b) En déduire l'écriture sous la forme $x+iy$ (x et y des réels) de $\frac{1}{z'}$ et $\frac{z}{z'}$

A retenir

Théorème et définition

Il existe un ensemble, appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un nombre non réel noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément z de s'écrit de maniére unique : $z = a + i\,b$ où a et b sont des réels.

Vocabulaire et notation

L'écriture $z = a + i\,b$, où a et b sont des réels, s'appelle forme algébrique (ou cartésienne) du nombre complexe z .
Le réel a est appelé **la partie réelle** de z et noté $Re(z)$.
Le réel b est appelé **la partie imaginaire** de z et noté $Im(z)$.
Si $a = 0$, alors z est appelé imaginaire pur.

Conséquences

Soit z *et* z' deux nombres complexes.

- z est réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.
- $z = 0$ si et seulement si $Re(z) = Im(z) = 0$.
- $z = z'$ si et seulement si $Re(z) = Re(z')$ *et* $Im(z) = Im(z')$.

Propriétés: Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$ avec a, b, a' et b' des réels.

- $z + z' = (a + a') + i\,(b + b')$
- $z - z' = (a - a') + i\,(b - b')$
- $z\,.z' = (a\,a' - b\,b') + i\,(a\,b' + b\,a')$

Si en plus $z' \neq 0$ alors on a :

- $$\frac{1}{z'} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + i\frac{-b'}{a'^2 + b'^2}$$
- $$\frac{z}{z'} = \frac{a\,a' + b\,b'}{a'^2 + b'^2} + i\frac{b\,a' - a\,b'}{a'^2 + b'^2}$$

Les calculs dans $\mathbb{C}$ se font de la même manière que les calculs dans $\mathbb{R}$ en remplaçant i^2 par (- 1) chaque fois que le cas se présente.
Dans la pratique, on ne retient pas les formules de l'inverse et du quotient, on fait intervenir l'égalité :

$$(x + i\,y)(x - i\,y) = x^2 + y^2$$

Applications

1 On considère les nombres complexes suivants : $z = 3 + 2\,i$ et $z' = 2 + i$.
Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants : $z + z'$, $z - z'$, $3\,z - 5\,z'$, $z\,.\,z'$, $\frac{1}{z'}$, $\frac{z}{z'}$

2 1) Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :
$(1 - 2i) - (3 + i)$; $(1 + i)^2$; $(1 + i)^3$; $(3 + i)(3 - i)$; $(a + i)(a^2 - ia + i^2)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

2) Trouver le réel x tel que : $x^2 + 3x - 3 + i(x + 2) = 1 - 2i$.

3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $z - 2i = iz + 5$; $2z(z - i) = 0$;

$\dfrac{z - 2i}{z + 3} = 2 - i$ (On donnera le résultat sous forme algébrique.)

4 1) Calculer : i^3 , i^4 , i^5 , i^6 , i^7 et i^8
2) Calculer : i^{50} , i^{57} , i^{2000} et i^{2007}
3) Calculer : $(1 + i)^2$, $(1 - i)^2$, $(1 + i)^{50}$ et $(1 - i)^{50}$

II. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Activités de découverte

Activité 1:

On donne les nombres complexes $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = -2 + 3i$.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

1) Placer les points : $A(Re(z_1), Im(z_1))$ et $B(Re(z_2), Im(z_2))$.

➢ Les points A et B ainsi obtenus s'appellent les **images** respectives des nombres complexes z_1 et z_2 dans le plan.
Réciproquement les nombres complexes z_1 et z_2 s'appellent les **affixes** respectives des points A et B. On note
$Aff(A) = z_1$; on lit : affixe de A est égal à z_1 ou encore
$A(z_1)$; on lit : A d'affixe z_1.

2) a) Donner les affixes des points suivants : $C(1, 3)$; $D(0, -2)$; $E\left(\sqrt{2}, 0\right)$; $F\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

b) Que peut-on dire de l'affixe d'un point appartenant à la droite des abscisses? à la droite des ordonnées ?

3) a) Déterminer l'affixe du point I milieu de $[AB]$.

b) Calculer $\dfrac{z_1 + z_2}{2}$. Conclure.

Activité 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. On considére un vecteur $\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ et le point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$
Le nombre complexe $z = x + iy$, qui est l'affixe du point M, est aussi appelé affixe du vecteur $\vec{u}$. On le note : Aff($\vec{u}$) ou $z_{\vec{u}}$.

On donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = a + ib$, $z_B = a' + ib'$ où a, b, a' et b' sont des réels.

1) a) Donner l'affixe du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$

b) Vérifier que : $Aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_B - z_A$

2) Soit I le milieu de $[AB]$. Montrer que : $Aff(I) = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

Activité 3:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives z *et* z' tels que : $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$, où a, b, a' et b' sont des réels.

1) Donner les coordonnées des vecteurs : $k.\vec{u}$ et $\vec{u}+\vec{v}$ (k réel)

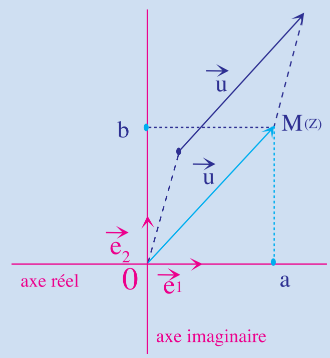
2) En déduire que : $Aff(k\vec{u}) = k\,Aff(\vec{u})$, $Aff\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = Aff\left(\vec{u}\right) + Aff\left(\vec{v}\right)$

A retenir

Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.

- A tout nombre complexe $z = a + i\,b$, où a et b sont des réels, on associe un unique point $M(a, b)$ du plan.
- A tout point $M(a, b)$ du plan, on associe un unique nombre complexe $z = a + ib$.



Vocabulaire et notation

- Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé affixe du point $M(a, b)$ et est noté $Aff(M)$ ou z_M.
- Le point $M(a, b)$ est appelé l'image du nombre complexe $z = a + i\,b$ et on note $M(z)$.

Remarques

- A tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ du plan on associe un unique nombre complexe $z = a + ib$.

Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé affixe du vecteur $\vec{u}$; on le note Aff($\vec{u}$) ou $z_{\vec{u}}$.

- Lorsqu' on repère un point ou un vecteur dans un repère orthonormé par son affixe, on dit qu'on se place dans **le plan complexe**.

Conséquences : Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

Soient M et M' deux points d'affixes respectives z et z'.

- (M et M' sont confondus) signifie ($z = z'$).
- z est réel si et seulement si M appartient à la droite des abscisses, appelée **axe réel**.
- z est imaginaire pur si et seulement si M appartient à la droite des ordonnées, appelée **axe imaginaire.**
- Les points d'affixes z et ($-z$) sont symétriques par rapport à O.

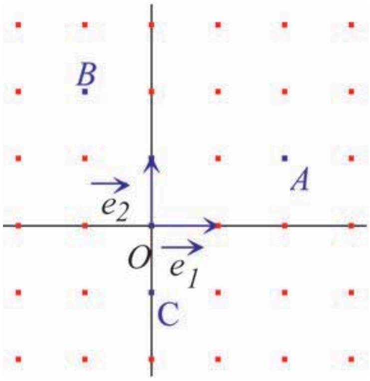
Propriétés: Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

- Si A et B sont deux points du plan, on a : $Aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = Aff\left(B\right) - Aff\left(A\right)$
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan et pour tout réel k, on a :

Si I est le milieu de $[AB]$ alors $Aff\left(I\right) = \dfrac{Aff\left(A\right) + Aff\left(B\right)}{2}$

$$Aff(k\vec{u}) = k\ Aff(\vec{u}) \qquad Aff\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = Aff\left(\vec{u}\right) + Aff\left(\vec{v}\right)$$

Applications



1 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. On a représenté ci-contre les points *A*, *B* et *C*
1) Déterminer les affixes de chacun des points : *A*, *B* et *C*.
2) Déterminer l'affixe du point *I* milieu du segment $[BC]$.
Placer le point *I*.
3) Déterminer l'affixe du point *D* symétriquede A par rapport à *I*. Placer le point *D*.
4) Justifier que *ABDC* est un parallélogramme.
5) Déterminer l'affixe du point *E* tel que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OA}$.
Placer le point *E*.

2 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soient *a* et *b* deux réels.
Déterminer l'ensemble des points $M(a, b)$ du plan tels que le nombre complexe $z = (a - 2) + i\,(2a - b)$ soit :

a) un réel b) un imaginaire pur c) nul

III. Conjugué d'un nombre complexe

Activités de découverte

Activité 1:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soit le point $M(z)$ où $z = 2+3i$.
On désigne par *M* ' le symétrique de *M* par rapport à l'axe réel. Placer les points *M* et *M* ' et en déduire l'affixe *z*' de *M* '.
➢ Le nombre complexe trouvé $z' = 2 - 3\,i$ s'appelle **conjugué** de *z* et se note par $\overline{z}$.

Activité 2 :

1) Donner le conjugué de chacun des nombres complexes suivants : $1 + i$; 3 ; $2 - 3\,i$
$2\,i$; $4\,i - 3$; $3 - 2\sqrt{3}$; $i\sqrt{5}$

2) Que peut-on dire du conjugué d'un réel? d'un imaginaire pur?

Activité 3 :

1) On donne deux nombres complexes : $z = 1 + 2\,i$ et $z' = -2 + i$.

a) Calculer : $\overline{z}$; $\overline{z'}$; $\overline{z + z'}$; $\overline{z - z'}$; $\overline{z\,z'}$; $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$; $\overline{z}\;\overline{z'}$; $\frac{1}{\overline{z'}}$ et $\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

b) Vérifier que : $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$; $\overline{z\,z'} = \overline{z}\;\overline{z'}$; $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

2) Cas général : soient $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$ où a, b, a' et b' sont des réels.

a) Montrer que : $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$; $\overline{z\,z'} = \overline{z}\;\overline{z'}$

b) En remarquant que pour $z' \neq 0$, $z' . \frac{1}{z'} = 1$, montrer que : $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$.

c) En utilisant : $\frac{z}{z'} = z . \frac{1}{z'}$, déduire que : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$.

Activité 4 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixe respectives z et z' tels que $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$, où a, b, a' et b' sont des réels.

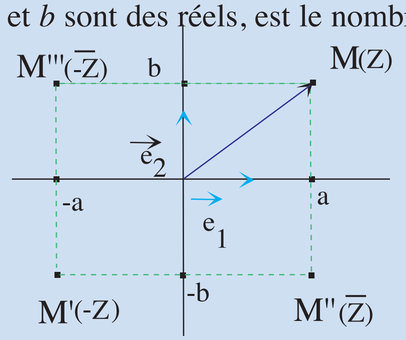
1) Montrer que $\overline{z}\, z' = (a\,a' + b\,b') + i\,(a\,b' - a'\,b) = \vec{u} \cdot \vec{v} + i \det(\vec{u}, \vec{v})$

2) En déduire :
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\overline{z} z'$ est réel.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\overline{z}\, z'$ est imaginaire pur

A retenir

Définition

Le conjugué du nombre complexe $z = a + i\,b$, où a et b sont des réels, est le nombre complexe $\overline{z} = a - i\,b$.



Remarques:

- Les points d'affixes z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z . \overline{z}}$

Propriétés

Pour tous nombres complexes z , z' et tout entier naturel non nul n,

on a : $\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z\, z'} = \overline{z}\, \overline{z'}$; $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$

Pour tous nombres complexes z et z' $(z' \neq 0)$ et tout entier naturel n, on a :

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{1}{(z')^n}\right)} = \frac{1}{\left(\overline{z'}\right)^n}$$

- $z + \overline{z} = 2\,Re(z)$; $z - \overline{z} = 2i\,Im(z)$
- z est réel $\Leftrightarrow$ $z = \overline{z}$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z = -\overline{z}$.

Théorème

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z' on a:

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\overline{z}\, z'$ est réel
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\overline{z}\, z'$ est imaginaire pur

1 1) Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants (on donne les conjugués sous forme algébrique) : $\sqrt{5}$; -3 ; $3i$; $-7i$; $1+3i$; $-5-i$;

$\dfrac{3-5i}{2}$; $2i-3$; $(1+i)^{2008}$; $\dfrac{5-2i}{i}$; $\dfrac{1}{i}$; $\dfrac{5+i}{3-i}$

2) soient a et b deux réels et n un entier naturel. Ecrire sous la forme $(a+ib)^n$ les nombres complexes suivants: $\overline{(2-3i)^{17}}$; $\dfrac{\overline{(3+i)}}{\overline{(4+3i)}}$ et $\dfrac{\overline{(3+i)^{20}}}{\overline{(4+3i)^{20}}}$

2 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on donne les points A et B d'affixes respectives $z = 1 + ia$ et $z' = 1 - ia$; avec a un nombre complexe.

1) Montrer que : $\bar{z}.z' = 1 - a\bar{a} - i(a + \bar{a})$

2) En déduire que :

a) Les points O, A et B sont alignés si et seulement si $Re(a) = 0$

b) Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $a\bar{a} = 1$

3 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. On pose $Z = z + \dfrac{1}{z}$ $(z \neq 0)$

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit réel.

IV. Module d'un nombre complexe

Activités de découverte

Activité 1 :

Dans le plan complexe rapporté à un repére orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on donne les points A et B d'affixe respectives $z_A = -2i$ et $z_B = 2-3i$

1) Placer les points A *et* B

2) Calculer les réels suivants : OB et $\sqrt{z_B.\overline{z_B}}$. Conclure.

3) Calculer les réels suivants AB et $\sqrt{(z_B - z_A).\overline{(z_B - z_A)}}$. Conclure.

4) On considère le point $M(x, y)$ d'affixe z. Comparer OM et $\sqrt{z\,\bar{z}}$

➢ Le réel positif $\sqrt{z\,\bar{z}}$ s'appelle **module** du nombre complexe z et se note par $|z|$.

5) On considére les points M et N d'affixes respectives : $z_M = a + ib$ et $z_N = a' + ib'$.
Comparer AB et $|z_N - z_M|$.

Activité 2 :

Montrer que si z et z' sont deux nombres complexes alors $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
(Pour montrer cette inégalité dans le cas où z et z' sont non nuls, on pourra en faire une interprétation géométrique et utiliser l'inégalité triangulaire)

Activité 3 :

Soient z et z' deux nombres complexes.

1) En utilisant l'égalité : $|z| = \sqrt{z\,\bar{z}}$, montrer que : $|z\,z'| = |z|\,|z'|$

2) En remarquant : $z' \cdot \dfrac{1}{z'} = 1$, où $z' \neq 0$, montrer que : $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$

3- En déduire que pour $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

A retenir

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Définition

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + i\,b$ et M le point d'affixe z.

On appelle module du nombre complexe z et on note $|z|$ le réel positif

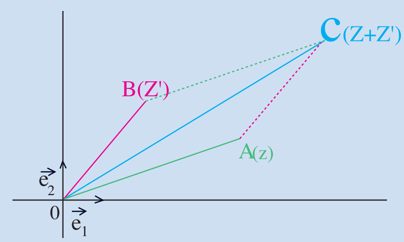
$\sqrt{z\,\bar{z}}$. On a : $|z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$

Remarques

- Pour tout réel x, $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x" ou "module de x"
- Pour tout nombre complexe z imaginaire pur, si $z = i\,y$, avec y un réel, alors $|z| = |y|$

Conséquences

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$



Pour tous nombres complexes z et z' et tout réel k, on a :

- $|Re(z)| \leq |z|$; $|Im(z)| \leq |z|$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$
- Si A *et* B sont deux points du plan complexe alors $AB = |z_B - z_A|$

Propriétés

- Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel non nul n,

  on a : $|z\,z'| = |z|\,|z'|$; $|k\,z| = |k|\,|z|$; $|z^n| = |z|^n$

- Pour tous nombres complexes z *et* z' ($z \neq 0$) et tout entier naturel n, on a :

  $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$; $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$; $\left|\dfrac{1}{z^n}\right| = \dfrac{1}{|z|^n}$

Applications

1 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on donne les points A , B et C d'affixe respectives $z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $z_C = 1 + i\sqrt{3}$

1) Calculer les modules respectifs de z_A , z_B et z_C

2) En déduire que les points A, B et C appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on donne le points A, B et C d'affixe respectives $z_A = i$; $z_B = -4 - i$; $z_C = -2 + 5i$.

1) Placer les points A, B et C

2) Calculer les affixes Z_1, Z_2 et Z_3 des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$

3) Calculer les modules respectifs de Z_1, Z_2 et Z_3

4) En déduire la nature du triangle ABC.

3 Le plan complexe est muni d'un repére orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 2i| = |z + 3|$.

2) a) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 3i| = 3$

b) En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|\bar{z} + 3i| = 3$ et l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|\bar{z} - 3i| = 3$

V. Equations dans $\mathbb{C}$

Activités préliminaires

Activité 1 :

1) Factoriser dans IR, si c'est possible, en un produit de binômes du 1[er] degré :

$x^2 + 4$; $x^2 - 3$; $-x^2 + 9$; $2x^2 - 3x - 5$

2) Résoudre dans IR l'équation : $x^3 - 8 = 0$

3) Résoudre dans IR l'équation : $3x^4 + 4x^2 - 7 = 0$

Activité 2 :

Soit le polynôme f définie par $f(x) = 3x^3 + x^2 + 2x - 6$

1) Vérifier que 1 est une racine de f .

2) Résoudre alors dans IR l'équation $f(x) = 0$

1. Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

Activités de découverte

Activité 1 :

1) En remarquant que $-4 = (2i)^2$, résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 = -4$

2) a) Vérifier que : $z^2 + 2z + 5 = (z + 1)^2 + 4$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$: $z^2 + 2z + 5 = 0$

Activité 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 = 0$; $z^2 = m$ $(m \in \mathrm{IR}^*_+)$; $z^2 = m$ $(m \in \mathrm{IR}^*_-)$

Activité 3 :

Soit le nombre complexe $3 + 4i$

1) En posant $z = x + iy$, montrer que : $z^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$

2) Trouver alors les solutions de l'équation $z^2 = 3 + 4i$.

Activité 4 :

1) Soient z et z' deux nombres complexes non réels de formes algébriques $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. Montrer l'équivalence suivante : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ |z| = |z'| \\ bb' > 0 \end{cases}$

2) En utilisant le résultat précédent, trouver les solutions de : $z^2 = 3 + 4i$

Activité 5 :

Soient a, b et c des nombres complexes.

On considère l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$).

Puisque les régles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que celles dans $\mathbb{R}$, on peut écrire :

$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ (forme canonique). On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

1) Résoudre (E) dans le cas où $\Delta = 0$

2) On suppose que $\Delta \neq 0$. On sait que, dans ce cas, Δ admet deux racines carrées δ et $(-\delta)$

Montrer alors que (E) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ que l'on déterminera.

A retenir

Théorème

Soient z et z' deux nombres complexes non réels de formes algébriques $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, on a : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ |z| = |z'| \\ bb' > 0 \end{cases}$

Théorème 1 (admis)

Soit a un nombre complexe non nul.

L'équation $z^2 = a$ admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions opposées .

Les solutions de l'équation $z^2 = a$ sont appelées les racines carrées de a.

Théorème 2

Soit $T(z) = az^2 + bz + c$, où a, b et c sont des nombres complexes, tels que $a \neq 0$.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de $T(z)$

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation $T(z) = 0$ admet une seule solution $z = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta \neq 0$ alors l'équation $T(z) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$z' = \dfrac{-b+\delta}{2\,a}$ et $z'' = \dfrac{-b-\delta}{2\,a}$ où δ est une racine carrée de Δ.

Remarque

Les solutions de l'équation $T(z) = 0$ sont aussi appelées les racines du polynôme $T(z)$.

Cas particulier : *a, b* et *c* sont des réels

- Si $\Delta > 0$, alors $z' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}$ et $z'' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a}$

- Si $\Delta < 0$, alors $z' = \dfrac{-b+\,i\sqrt{-\Delta}}{2\,a}$ et $z'' = \dfrac{-b-\,i\sqrt{-\Delta}}{2\,a}$

Remarques

Soit $T(z) = a\,z^2 + b\,z + c$, où a, b et c sont des nombres complexes, tels que $a \neq 0$.

- Si z' et z'' sont les solutions de l'équation $T(z) = 0$ alors on a:

$z' + z'' = -\dfrac{b}{a}$; $z' \,.\, z'' = \dfrac{c}{a}$; $T(z) = a\,z^2 + b\,z + c = a\,(z - z')\,(z - z'')$

- Si $a + b + c = 0$, alors l'équation $T(z) = 0$ admet deux solutions : 1 et $\dfrac{c}{a}$.

- Si $a - b + c = 0$, alors l'équation $T(z) = 0$ admet deux solutions : -1 et $-\dfrac{c}{a}$.

Applications

1 1) Déterminer les racines carrées des : 3 ; -5 ; $7 + 24\,i$.

2) a) Déterminer la forme algébrique de : $(1 + i)^2$ et $(1 - i)^2$.

b) En déduire les racines carrées de : i ; $3\,i$; $-\,i$; $-7\,i$.

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $z^2 + z + 1 = 0$; $z^2 - (2 + i)\,z + 2\,i = 0$

3 Factoriser les expressions : $(2 - i)\,z^2 - (2 + i)\,z + 2\,i$; $i\,z^2 + \sqrt{2}\,z - i$.

2. Equations de degré supérieur à deux dans $\mathbb{C}$

Activités de découverte

Activité 1 :

1) a) Ecrire le nombre complexe $(3 + 4\,i)^2$ sous forme algébrique.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2\,z^2 + 3\,z + 2 - 3\,i = 0$

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $2\,z^4 + 3\,z^2 + 2 - 3\,i = 0$

En posant $Z = z^2$, résoudre l'équation (E).

Activité 2 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

1) Vérifier que (- 1) est une solution de (E) .

2) Trouver les réels a, b et c tels que : $z^3 + z^2 + z + 1 = (z+1)(a z^2 + b z + c)$

3) Résoudre alors l'équation (E)

Point méthode :

Résolution d'une équation de degré 3

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ où $P(z) = a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$ $(a_1 \neq 0)$, connaissant une solution z_0 :

- On calcule les trois nombre complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z - z_0)(a z^2 + b z + c)$
- On résout l'équation : $a z^2 + b z + c = 0$

Résolution d'une équation bicarrée

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ où $P(z) = a z^4 + b z^2 + c$ $(a \neq 0)$:

- On pose $Z = z^2$ et on détermine Z' et Z'' solutions de l'équation $a Z^2 + b Z + c = 0$
- On cherche les racines carrées de Z' et Z''

Applications

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $z^3 + 8 = 0$; $z^3 + 3iz^2 - 3z - i = 0$; $z^4 + (1 - 2i)z^2 - 2i = 0$

2 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$

1) Vésrifier que i est une solution de l'équation (E).

2) Trouver les réels b et c tel que: $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = (z - i)(z^2 + bz + c)$

3) Résoudre alors l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

3 On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^3\ 1$

1) Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vérifier que $1, j$ et $\overline{j}$ sont les racines de $P(z)$.

2) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives 1, j et $\overline{j}$.

a) Montrer que ABC est un triangle équilatéral.

b) Déterminer son centre de gravité.

Situation 1

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.On pose $Z = \dfrac{z-1}{z-i}$

1) Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que Z soit réel.
2) Déterminer l'ensemble F des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur.

Vers une solution

On doit avoir $z - i \neq 0$ ($z \neq i$) autrement dit $M \neq A$ où A est le point d'affixe i.

Première méthode

- En posant $z = x + i\,y$ dans l'expression de Z, on obtient : $Z = \dfrac{\left(x-1\right)+i\,y}{x+\,i\left(y-1\right)}$
- En écrivant Z sous forme algébrique (multiplier le numérateur et le dénominateur par $x - i\,(y - 1)$), on obtient : $Z = \dfrac{x^2 - x + y^2 - y}{x^2+\left(y-1\right)^2} + i\dfrac{x+y-1}{x^2+\left(y-1\right)^2}$
- Les ensembles E et F sont tels que : $Im(Z) = 0$ et $Re(Z) = 0$ ...

Deuxième méthode

- En calculant $\overline{Z}$ on obtient : $\overline{Z} = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}$
- $Z = \overline{Z} \Leftrightarrow \dfrac{z-1}{z-i} = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}$ ($z \neq i$)

$\Leftrightarrow i\,(z + \overline{z}) + (z - \overline{z}) - 2\,i = 0$ $(z \neq i)$

En posant $z = x + i\,y$ avec $(x, y) \neq (0, 1)$, on retrouve l'ensemble E .

- On adopte la même démarche pour retrouver l'ensemble F avec $Z = -\overline{Z}$.

Situation 2

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i = 0$

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure.
2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Vers une solution

1) On pose $z = i\,y$ (où y un réel)

- z est solution de (E) si et seulement si $(2\sqrt{3}\,y^2 - 4\sqrt{3}\,y) + i\,(-y^3+2y^2+4y-8) = 0$

d'où le système (S) $\begin{cases} 2\sqrt{3}\,y^2 - 4\sqrt{3}\,y = 0 \\ -y^3+2y^2+4y-8 = 0 \end{cases}$

Pour résoudre le système (S), on résout l'équation $2\sqrt{3}\,y^2 - 4\sqrt{3}\,y = 0$ (la plus simple) et on vérifie si les solutions trouvées sont solutions de l'autre équation.

2) Déterminer b et c tels que : $z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i = (z-2i)(z^2+b\,z+c)$

- On trouve : $z_0 = 2\,i$; $z_1 = \sqrt{3}+i$ et $z_2 = \sqrt{3}-i$

Avec l'outil informatique

Produit de deux nombres complexes

Le programme suivant permet de calculer le produit de deux nombres complexes écrit en langage Turbo Pascal.

```
program produit;
uses wincrt ;
var a1, b1, a2,b2,ReP, ImP : real;
begin
writeln('donner la valeur de la partie reelle de z1');
readln(a1);
writeln('donner la valeur de la partie imaginaire de z1');
readln(b1);
writeln('donner la valeur de la partie reelle de z2');
readln(a2);
writeln('donner la valeur de la partie imaginaire de z2');
readln(b2);
ReP:=a1*a2-b1*b2;
ImP:=a1*b2+a2*b1;
writeln('le produit de z1 et z2 est: ',ReP,'+(',ImP,')i');
end.
```

Applications

Calculer $z_1 z_2$ dans chacun des cas suivants :

a) $z_1 = 3 + 4i$ et $z_2 = 1 - i$

b) $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + i$

c) $z_1 = 2i$ et $z_2 = 3 + i$

Racine carrée d'un nombre complexe

Ce programme permet de calculer une racine carrée d'un nombre complexe écrit en langage Turbo Pascal.

```
program racine;
uses wincrt;
var a, b, ar,br, modu: real;
begin
writeln('donner la valeur de la partie reelle de z');
readln(a);
writeln('donner la valeur de la partie imaginaire de z');
readln(b);
modu:= sqrt(a*a+b*b);
ar:=sqrt((a+modu)/2);
br:=b/(2*ar);
writeln('une racine carrée de z est',ar,'+i(',br,')');
end.
```

Applications

Calculer une racine carrée de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = -3 + 4i$; b) $z = 1 + i$; ; c) $z = 2i$

VRAI-FAUX

1 Répondre par **vrai** ou **faux**

(z et z' sont deux nombres complexes et $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ un repère orthonormé du plan complexe).

1) $|z| = |z'| \Leftrightarrow z = z'$ ou $z = -z'$

2) $|z| = |\bar{z}| \Leftrightarrow |z| = |z'|$

3) Les points d'affixes respectives z et $\bar{z}$ appartiennent à un même cercle de centre O.

4) Les nombres complexes a et b solutions de l'équation : $z^2 - 2z + 10 = 0$ sont conjugués.

2 **QCM**

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.

1) L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 2i| = 4$ est :

a)La médiatrice de $[AB]$ avec $A(2i)$ et $B(4)$

b) un cercle de centre $A(2i)$

c) un cercle de rayon 2

2) $Im(3 + i(2+i))$ est :

a) $2 + i$ b) $2i$ c) 2

3) On considère le nombre complexe : $z = (1 - i)^2$

a) $|z| = 1$

b) z est réel strictement positif

c) z est imaginaire pur

4) Les solutions de $z^2 - 4z + 13 = 0$ sont :

a) $2 - 5i$ et $-2 + 5i$

b) $-4 + i$ et $4 + i$

c) $2 - 3i$ et $2 + 3i$

5) Les racines carrées de $\frac{2}{i}$ sont :

a) $\frac{\sqrt{2}}{i}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{i}$

b) $1 - i$ et $-1 + i$

c) $\sqrt{2}\, i$ et $-\sqrt{2}\, i$

6) On pose $z' = \frac{z + 4i}{z - 2}$; $z \neq 2$ .L'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z'| = 1$ est

a) un cercle de rayon 1

b) une droite

c) une droite privée d'un point

d) un cercle privé d'un point

On donne les nombres complexes :

$z = 4 + 3i$ et $z' = 5 - 2i$

3 Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants:

$z + z'$; $z - z'$; $3z - z'$;

zz' ; $(z + z')^2$; $(z - z')^2$;

$z^2 - (z')^2$; $z^3 - (z')^3$; $\frac{z}{z'}$

4 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, placer les points d'affixes : $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 + i$, $z_3 = -1 + 2i$, $z_4 = 2 - i$, $z_5 = 2z_1 - 3z_2$, $z_6 = z_3(z_4 - z_2)$

5 Déterminer le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$2 - \sqrt{3}$; $i\sqrt{2} + 5i$; i^4 ; $\frac{1 + 5i}{537\, i}$; $2i - 7$

$\frac{1 + i}{1 - i}$; $\frac{3}{5 - i} + \frac{i}{5 + i}$

6 Soient les nombres complexes :

$z = 3 + 4i$ et $z' = 1 - i$.

Calculer les modules des nombres complexes suivants : z , z' , zz'

$\frac{1}{z}$; $\frac{z}{z'}$; z^{2007}

7 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on donne les points A et M d'affixe respectives :

$z_A = -1$ et $z = x + iy$, avec x et y des réels.

on pose $Z = \frac{iz}{z + 1}$

1) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.

2) En déduire

a) L'ensemble E des points M tels que Z soit réel.

b) L'ensemble F des points M tels que Z soit imaginaire pur.

8 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives 1, $-3i$ et i.

A tout point M d'affixe z $(z \neq -3i)$, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{z-1}{3-iz}$

1) a) Vérifier que, pour tout $z \neq -3i$,

$$z' = \frac{i(z-1)}{z+3i}$$

b) Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$

2) Déterminer l'ensemble des points M tel que z' soit réel .

3)a) Vérifier que, pour tout $z \neq -3i$,

$$|z'-i| . |z+3i| = \sqrt{10}$$

b) En déduire que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon

9 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on désigne par A le point d'affixe i.

A tout point M d'affixe z $(z \neq i)$, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{iz-2+4i}{z-i}$

1) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, y, x' et y' désignent des réels.

a) Calculer x' et y' en fonction de x et y

b) Déterminer et représenter l'ensemble des points M tel que z' soit réel

c) Déterminer l'ensemble des points M tel que z' soit imaginaire pur

2) On pose $Z = z - i$ et $Z' = z' - i$.

a) Montrer que $ZZ' = -3 + 4i$. Calculer le module de ZZ' .

b) Soit r un réel strictement positif.

Déduire de ce qui précède que si M d'écrit le cercle (C) de centre A et de rayon r alors M' appartient à un cercle (C') de centre A

c) Déterminer r pour que (C) et (C') soient confondus.

10 Déterminer les racines carrées des chacun des nombres complexes suivants :

$1 + 2i\sqrt{2}$; $6 - 30i$; $-45 - 28i$; 5 ; $-7i$; $24 + 10i$; -7 ; $-5 + 12i$.

11 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $(2+i)z - 3 + 2i = 0$

2) $\dfrac{z+2}{z-1} = 3 + i$

3) $z + 3\bar{z} = 4 + 2i$

4) $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$

5) $(3+i)z^2 + (1+4i)z - 4 - 5i = 0$

6) $(2+i)z^2 - (3+2i)z + 1 - \dfrac{i}{2} = 0$

7) $z^2 - (10i - 7)z - (11 + 41i) = 0$

8) $z^2 - 4(6+i)z + (63 + 16i) = 0$

9) $z^3 - 8 = 0$

10) $z^3 + 1 = 0$

11 **1)** Soit $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$

a) Vérifier que $P(4) = 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 - 6\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + 12\left(\frac{z-i}{z+i}\right) - 16 = 0$$

(On peut poser $Z = \dfrac{z-i}{z+i}$)

13 **1) a)** Vérifier que $(2-3i)^2 = -5-12i$
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^2 - (4-i)z + 5 + i = 0$$
2) On considére dans $\mathbb{C}$, l'équation (E):
$$z^3 - (10-i)z^2 + (29-5i)z - 30 - 6i = 0$$
a) Vérifier que :
$z^3 - (10-i)z^2 + (29-5i)z - 30 - 6i$
$= (z-6)(z^2 - (4-i)z + 5 + i)$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 6$, $z_B = 1+i$ et $z_C = 3-2i$
a) Placer les points A, B et C
b) Calculer les distances AB, AC et BC
c) En déduire la nature du triangle ABC
d) Déterminer l'affixe de point D pour que $ACBD$ soit un carré.

14 On considère dans $\mathbb{C}$: $P(z) = z^4 - 4z^2 + 16$
1) Déterminer le réel a tel que :
$$P(z) = (z^2 + az + 4)(z^2 - az + 4)$$
2) a) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On notera z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives.
b) Vérifier que les solutions de $P(z) = 0$ sont $z_1, -z_1, \overline{z_1}$ et $-\overline{z_1}$
3) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$
a) Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_1, -z_1, \overline{z_1}$ et $-\overline{z_1}$
b) Vérifier que ces points sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 2.

15 **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système :
$$(S)\begin{cases} 8x + 2y + t = 0 \\ x + y + t = -5 \\ -x - y + t = -3 \end{cases}$$
2) On considère dans $\mathbb{C}$:
$f(z) = az^3 + bz + c$; où a, b et c sont des réels.
a) Déterminer les réels a, b et c pour que l'on ait :
$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(1) = -5 \\ f(-1) = -3 \end{cases}$$
b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$f(z) = 0$

16 **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système :
$$(S)\begin{cases} x + y - 2t = -6 \\ y + t = -1 \\ x + t = 3 \end{cases}$$
2) On considère dans $\mathbb{C}$:
$f(z) = az^3 + biz^2 + (c-6)z + ic$
où a, b et c sont des réels.
a) Déterminer les réels a, b et c pour que l'on ait : $f(1) = -3 - i$ et $f(i) = 0$
b) Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$
3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 1+i$ et $z_C = -1+i$
a) Placer les points A, B et C
b) Déterminer la nature du triangle OBC.

17 Pour tout nombre complexe z on pose
$f(z) = z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i$
1) a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
b) Démontrer qu'il existe deux réel b et c tels que : $f(z) = (z - z_0)(z^2 + bz + c)$
c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$
2) Dans le plan complexe rapporté à un

repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on désigne par *A, B et C* les points d'affixes respectives :

$z_A = -i$, $z_B = 8 + 5i$ et $z_C = 8 - 5i$

a) Déterminer la nature du triangle *ABC*

b) Déterminer l'ensemble *E* des point *M* tels que $-MA^2 + MB^2 - MC^2 = 20$

18 I- On considère dans $\mathbb{C}$:

$f(z) = z^3 + a z^2 + b z + c$ où *a, b* et *c* sont des réels.

1) a) Montrer que si $f(2) = 0$ et $f(1 - i) = 0$ alors a, b et c vérifient le système :

$$(S)\quad \begin{cases} 4a + 2b + c + 8 = 0 \\ b + c - 2 = 0 \\ 2a + b + 2 = 0 \end{cases}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (*S*).

2) Dans la suite on prend

$f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.

a) Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $f(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 2)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

II- Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, on désigne par *A* et *B* les points d'affixes respectives 2 et 1-*i*.

1) Montrer que le triangle *OAB* est rectangle en *B*.

2) Soit *C* le symétrique de *B* par rapport à l'axe des abscisses.

Montrer que *OABC* est un carré.

(Bac Tunisien)

19 **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système :

$$(S)\quad \begin{cases} x + y + z = -1 \\ x - y + z = -5 \\ 4x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

2) On considère dans $\mathbb{C}$:

$f(z) = z^3 + a z^2 + b z + c$ où *a, b* et *c* sont des réels.

a) Déterminer les réels *a, b et c* pour que l'on ait :

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = -6 \\ f(2) = 12 \end{cases}$$

b) Vérifier que l'on a alors :

$f(z) = (z - 1)(z^2 + 2z + 4)$.

3) Résoudre, dans C, l'équation :

$(z - 1)(z^2 + 2z + 4) = 0$.

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. On donne les points *A, B et C* d'affixes respectives :

$z_A = 1$; $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$

a) Placer les points *A, B* et *C*.

b) Déterminer l'affixe du point *D* tel que le quadrilatère *ABCD* soit un parallèlogramme.

(Bac Tunisien)

Au début du XVIème siécle, le mathématicien **Scipione dal Ferro**, propose une formule donnant une solution de l'équation du 3ème degré : $x^3 + p\,x = q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

A la fin du XVIème siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à l'équation

$x^3 - 15\,x = 4$. Il obtient littéralement : $x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$.

Cette écriture n'a, à priori, pas de sens puisqu'on ne sait pas ce que représente le symbole noté $\sqrt{-1}$

Mais **Bombelli** va plus loin. Il remarque que, en utilisant les régles usuelles de calcul que

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Si bien qu'il obtient finalement : $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$.

Or, 4 est bien une solution de l'équation $x^3 - 15\,x = 4$.

Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-desous $\left(\sqrt{-1}\right)$?

C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes.

➢Le symbole $\sqrt{-1}$ a été donc utilisé au XVIème siècle par Bombelli. Or

- Les solutions de l'équation $z^2 = -1$ sont i et -i d'où $\sqrt{-1} = i$.

- On a : $\boldsymbol{1 = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i\,.\,i = i^2 = -1}$ c'est absurde.

•Pour cette raison le symbole $\sqrt{-1}$ que nous avons utilisé en toute impunité est absolument interdit à partir de maintenant.

• Dans la réalité, il a fallu 150 ans pour l'abandonner et utiliser la notation i proposée par **Euler**.