Chapitre 13

PROBABILITÉS

Bernoulli Jean

I.Espaces probabilisés finis - Probabilités :

Activités préliminaires

Activité 1 :

Sur une étagère sont rangés 5 livres de mathématiques, 4 livres de physique et 6 romans. Deux livres de mathématiques, deux livres de physique et deux romans sont édités en Tunisie, et les autres sont édités à l'étranger.
On tire au hasard un livre de l'étagère.
a) Combien y'a-t-il d'issues possibles ?
b) On donne l'évènement E : «Le livre tiré est un livre de mathématiques».
Donner le nombre d'éléments de E et calculer sa probabilité.

• L'ensemble de toutes les issues possibles est appelé **univers**.

c) Déterminer la probabilité de l'évènement F : «Le livre est édité en Tunisie».
d) Soit G l'évènement : «Le livre tiré est un livre de mathématiques édité en Tunisie». Exprimer G à l'aide de E et F puis déterminer sa probabilité.
e) Soit H l'évènement : «Le livre tiré est un roman». Déterminer $E \cap H$.

• On dit que E et H sont **incompatibles.**

f) Soit K l'évènement : «Le livre tiré est édité à l'étranger». Exprimer K à l'aide F puis calculer p(K).
g) Soit L l'évènement : «Le livre tiré est un roman édité en Tunisie». Exprimer L à l'aide F et H puis déterminer sa probabilité.

Activité 2 :

Une bonbonnière contient 8 bonbons au caramel et 12 bonbons à la menthe. L'expérience consiste à en tirer un bonbon.
1) On suppose que tous les bonbons ont la même probabilité d'être tirés. Calculer la probabilité de tirer un bonbon à la menthe.
2) On suppose que la probabilité de tirer un bonbon au caramel est égale à deux fois celle d'un bonbon à la menthe. Calculer la probabilité de tirer un bonbon à la menthe.

Activité 3 :

Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules rouges indiscernables au toucher.
1) On tire au hasard une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche?
2) On fait deux tirages successifs d'une boule en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne.
a) Faire un arbre de choix correspondant à la situation.
b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
E : «On obtient deux boules blanches».
F : «La deuxième boule tirée est blanche».
G : «On obtient au plus une boule blanche».
3) On fait deux tirages successifs, mais sans remettre la boule tirée dans l'urne.

a) Faire un arbre de choix correspondant à la situation.
b) Calculer la probabilité de chacun des événements E, F et G.

Activité 4 :

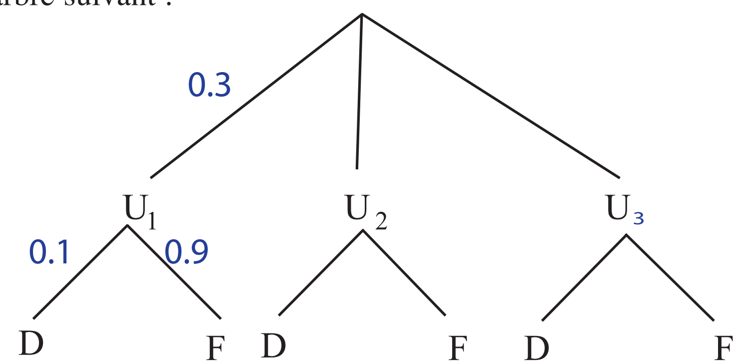
Une entreprise fabrique des appareils électroménagers ; la production est répartie sur trois usines U_1, U_2 et U_3, pour respectivement 30%, 25% et 45% de la production totale. Tous les appareils sont testés. Les pourcentages d'appareils défectueux sont 10% pour U_1 , 15% pour U_2 et 4% pour U_3 . Soit les événements suivants :

D : «L'appareil est défectueux»

F : «L'appareil fonctionne», U_1 : «L'appareil provient de U_1»

U_2 : « L'appareil provient de U_2 » et U_3 : «L'appareil provient de U_3 »

1) Compléter l'arbre suivant :



2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
$U_1 \cap D$, $U_2 \cap D$ et $U_3 \cap D$. En déduire $p(D)$.

3) Calculer $p(F)$ de deux manières.

A retenir

Définition

Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire et $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. On appelle probabilité sur Ω toute application p de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans [0,1] telle que :

. $p(\Omega) = 1$

. Pour tous A et B de $\mathscr{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \varnothing$ on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ s'appelle espace probabilisé fini.

Vocabulaire

. L'ensemble Ω est appelé univers.

. Toute partie de Ω est appelée événement. Un singleton est appelé évènement élémentaire.

. La partie Ω est appelée évènement certain.

. L'ensemble vide est appelé évènement impossible.

. A et B étant deux évènements.

- $A \cap B$ est appelé évènement A et B.

$A \cup B$ est appelé évènement A ou B.

- Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont incompatibles.

A et B sont deux évènements contraires si: $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \varnothing$.

On note : $B = \overline{A}$ ou $A = \overline{B}$.

• Deux évènements A et B sont dits équiprobables si $p(A) = p(B)$.

Propriétés

Soit $(\Omega , \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini :

•Lorsque les évènements élémentaires sont tous équiprobables, la probabilité d'un évènement A est $p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

•A et B étant deux évènements

-$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ si A et B sont incompatibles.

- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Applications

1 Une boite contient trois jetons blancs, quatre jetons rouges et cinq jetons verts. Les jetons blancs sont numérotés 1, 2,3, les rouges 1, 2, 3,4 et les verts 1, 2, 3, 4,5.
On tire au hasard et simultanément trois jetons de la boite. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
E : «Les jetons tirés sont blancs».
F : «Les jetons tirés sont de même couleur».
G : «Parmi les jetons tirés un seul jeton porte le numéro 1».
H : «Parmi les jetons tirés un et un seul est vert».
I : «Les jetons tirés portent des numéros impairs».
J : «La somme des trois numéros est égale à 5».
K : «Deux jetons sont rouges et un jeton seulement porte le numéro 4».

2 Un code d'ouverture d'une serrure est donné par un nombre de trois chiffres choisis parmi les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
1) On choisit un nombre au hasard. Quelle est la probabilité pour que :
a) On obtienne le code de la serrure ?
b) Le nombre choisi ait le même chiffre d'unité que le code ?
2) On sait que le code est constitué par les chiffres 1,3 et 6. Quelle est la probabilité :
a) D'obtenir le code de la serrure ?
b) D'avoir le même chiffre d'unités, des dizaines ou des centaines que le code ?

3 Une urne contient cinq jetons blancs et trois jetons rouges. On fait deux tirages successifs d'un jeton sans remise. Soit E l'évènement : « On tire un jeton blanc au premier tirage » et F l'évènement : « On tire un jeton rouge au deuxième tirage ».
1) Faire un arbre de choix.
2) Déterminer $p(E)$, $p(\overline{E})$, $p(E \cap F)$ et $p(\overline{E} \cap F)$. En déduire $p(F)$.

II.Probabilités conditionnelles.

Activités de découverte

Activité 1 :

Le tableau suivant donne des statistiques sur l'adhésion des élèves d'une classe à un club sportif ou culturel selon le sexe.

	Adhérents	Non adhérents	
Garçons	14	10	24
Filles	8	4	12
	22	14	36

1) a) Donner le nombre de garçons adhérents à un club.

b) Donner le nombre de filles non adhérentes à un club.

2) Dans la liste des élèves on choisit un élève au hasard.

Soit G l'évènement : «l'élève choisi est un garçon» et A l'évènement : « l'élève choisi est adhérent à un club»

Déterminer $p(A)$, $p(\overline{A})$, $P(G)$ et $p(\overline{G})$.

3) On choisit un garçon. Quelle est la probabilité pour qu'il soit adhérent à un club ? Non adhérent à un club ?

4) On choisit un élève parmi ceux qui ne sont pas adhérents à un club.

a) Quelle est la probabilité pour qu'il soit un garçon? Une fille ?

. La probabilité pour que parmi les garçons on obtienne un élève adhérent à un club s'appelle **probabilité conditionnelle** de l'événement **A sachant G.**

Elle est notée **p(A/G)** ou bien $\mathbf{p_G(A)}$

b) Donner $p(A/G)$

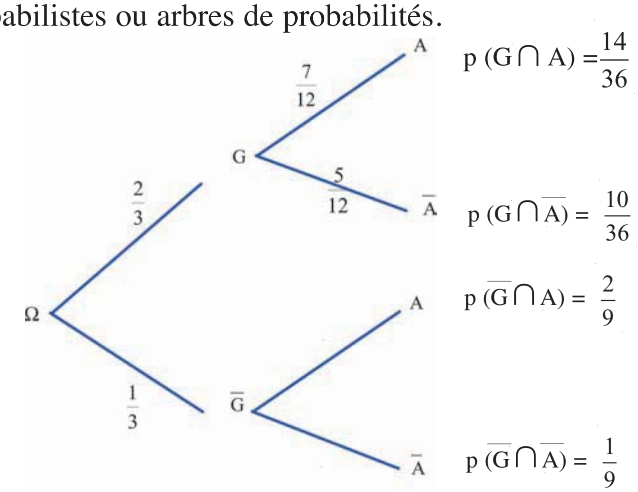
5) a) En considérant l'exemple précédent, déterminer de la même manière :

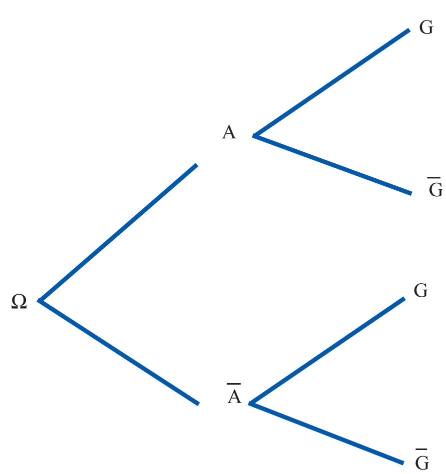
$p(\overline{A}/G)$, $p(G/\overline{A})$ et $p(\overline{G}/A)$.

b) Déterminer $p(\overline{A} \cap G)$, $p(G \cap A)$ et $p(\overline{G} \cap A)$ puis comparer $p(\overline{A}/G)$ et $\dfrac{p(\overline{A} \cap G)}{p(G)}$, $p(G/A)$ et $\dfrac{p(G \cap A)}{p(A)}$, $p(\overline{G}/A)$ et $\dfrac{p(\overline{G} \cap A)}{p(A)}$ Que remarque-t-on ?

Activité 2 :

La situation précédente peut être représentée par l'un des schémas suivants appelés arbres probabilistes ou arbres de probabilités.





Remarquer que le nombre $\frac{7}{12}$ inscrit sur la branche entre G et A est égal à $p\left(A/G\right)$, il en est de même pour les nombres inscrits sur les branches entre G et $\overline{A}$, $\overline{G}$ et A , $\overline{G}$ et A

a) Compléter le schéma 1

b) Remplir le schéma 2 par les probabilités correspondantes.

c) Vérifier que, dans les première et troisième colonnes, la somme des probabilités est égale à 1 et que chaque probabilité inscrite à la première colonne est la somme des probabilités inscrites au bout des branches qui en sont issues. Expliquer.

Activité 3 :

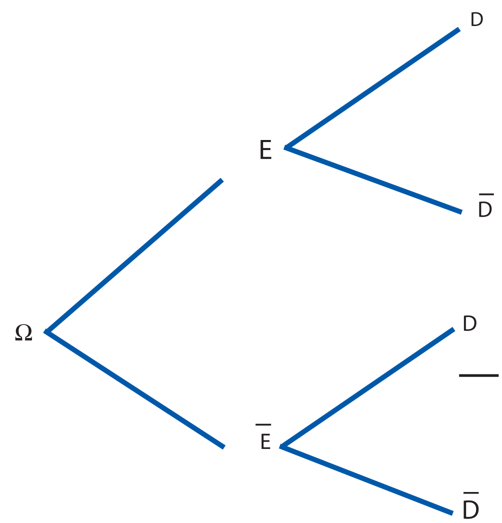
Dans une usine, des pièces mécaniques sont produites par deux machines A et B avec des pourcentages de 40% pour la machine A et 60% pour la machine B. On estime que 15% des pièces produites par la machine A et 8% des pièces produites par la machine B sont défectueuses.

On choisit une pièce au hasard et on considère les évènements :

E : « La pièce est produite par la machine A »

et D: « La pièce est défectueuse ».

a) Compléter l'arbre probabiliste ci-contre en inscrivant les probabilités correspondantes

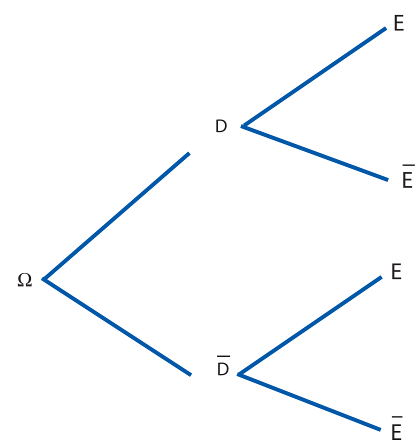


b) Déterminer p (D) puis p($\overline{D}$) .

c) Compléter le deuxième arbre probabiliste ci-contre en inscrivant les probabilités correspondantes.

d) En déduire les probabilités conditionnelles suivantes :

p(E/D), p($\overline{E}/\overline{D}$) et p(E/ $\overline{D}$)



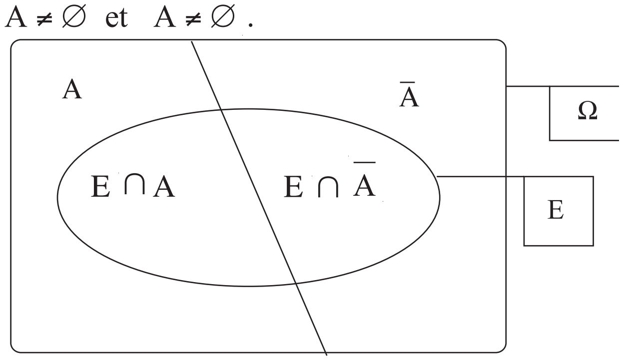
Activité 4 :

1) On donne deux évènements A et E tels que $A \neq \varnothing$ et $\overline{A} \neq \varnothing$.

a) En considérant le diagramme ci-contre, montrer que $p(E) = p(E \cap A) + p(E \cap \overline{A})$.

b) En déduire que

$p(E) = p(E/A).p(A) + p(E/\overline{A}).p(\overline{A})$.



2) On donne n évènements $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ formant une partition de Ω c'est-à-dire :

$A_k \neq \varnothing$ pour tout $k \in \{1, 2, 3, \ldots\ldots n\}$;

$A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$

et $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

a) Montrer, en procédant de la même manière que précédemment que

$$p(E) = p(E/A_1).p(A_1) + p(E/A_2).p(A_2) + \ldots + p(E/A_n).p(A_n)$$

L'égalité précédente s'appelle formule **des probabilités totales.**

b) Montrer que l'on a pour tout $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$: $p(E/A_k)p(A_k) = p(A_k/E)p(E)$

En déduire que $p(A_k/E) = \dfrac{p(E/A_k).p(A_k)}{p(E/A_1).p(A_1)+\ldots+p(E/A_n).p(A_n)}$

La dernière formule est appelée **formule de Bayes**. Elle sert à calculer une probabilité conditionnelle connaissant des probabilités conditionnelles «inverses».

Activité 5 :

A) Voici un autre tableau donnant des statistiques sur l'adhésion des élèves d'une classe à un club sportif ou culturel selon le sexe. On choisit un élève au hasard.

	Adhérents	Non adhérents	
Garçons	15	5	20
Filles	12	4	16
Total	27	9	36

Soit G l'évènement : « l'élève choisi est un garçon » et
A l'évènement : « l'élève choisi est adhérent à un club »

a) Comparer la proportion de garçons adhérents par rapport au nombre total des garçons et la proportion des filles adhérentes par rapport au nombre total des filles.

b) Déterminer puis comparer $p(A)$, $p(A/G)$ et $p(A/\overline{G})$.

Faire de même pour $p(G)$, $p(G/A)$ et $p(G/\overline{A})$. Conclure.

c) Comparer $p(A \cap G)$ et $p(A) . p(G)$.

On voit que la réalisation de l'évènement G ne dépend pas de la réalisation de A.

➢ On dit que les évènements G et A sont **indépendants.**

B) On considère l'exemple de l'activité 1 . Les évènements A et G sont-ils indépendants ?

A retenir

Définition

Dans un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$, on donne deux évènements A et B tels que $p(B) \neq 0$. On appelle « probabilité conditionnelle de A sachant B» le réel noté $p(A/B)$ ou bien $p_B(A)$ et défini par :

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Conséquence si $p(A) \neq 0$ alors $p(A \cap B) = p(A).p(B/A)$
si $p(B) \neq 0$ alors $p(A \cap B) = p(B).p(A/B)$

Formule des probabilités totales

$A_1, A_2 \dots A_n$ étant des évènements formant une partition de l'univers Ω et E étant un évènement de probabilité non nulle, on a :

$$p(E) = p(E/A_1).p(A_1)+p(E/A_2).p(A_2)+\dots\dots+p(E/A_n).p(A_n)$$

En particulier si A est un évènement tel que $p(A) \neq 0$ et $p(\overline{A}) \neq 0$ alors

$$p(E) = p(E/A).p(A) + p(E/\overline{A}).p(\overline{A}).$$

Formule de Bayes

$A_1, A_2 \dots A_n$ étant des évènements formant une partition de l'univers et E étant un évènement de probabilité non nulle, pour tout
$k \in \{1, 2, 3, \dots\dots, n\}$

on a $$p(A_k/E) = \frac{p(E/A_k).p(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} p(E/A_i).p(A_i)}$$

Evènements indépendants

Deux évènements A et B sont dits indépendants si la réalisation de l'évènement A ne dépend pas de la réalisation de l'évènement B c'est à dire:

$$p(A/B) = p(A), \quad p(B/A) = p(B) \quad \text{ou encore } p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

Exemple

Dans les classes terminales d'un lycée, 50% des élèves sont en section scientifique, 30% en section économique et 20% en section lettres. Les statistiques du lycée montrent que $\frac{3}{4}$ des élèves scientifiques, la moitié des élèves de la section économiquee et $\frac{1}{4}$ des élèves de la section lettres choisissent l'informatique comme matière optionnelle.
On choisit un élève au hasard et on constate qu'il a choisi l'informatique.
Quelle est la probabilité qu'il soit dans une section scientifique ?

Solution

On considère les évènements suivants :
E : «L'élève a choisi l'informatique».
A_1 : «L'élève est en section scientifique».
A_2 : «L'élève est en section économique».
A_3 : «L'élève est en section lettres».

On a : $p(A_1) = \frac{50}{100}$, $p(A_2) = \frac{30}{100}$ et $p(A_3) = \frac{20}{100}$

$p(E/A_1) = \frac{3}{4}$ $p(E/A_2) = \frac{1}{2}$ et $p(E/A_3) = \frac{1}{4}$

La probabilité cherchée est $p(A_1/E)$. D'après la formule de Bayes on a :

$$p(A_1/E) = \frac{p(E/A_1).p(A_1)}{p(E/A_1).p(A_1) + p(E/A_2).p(A_2) + p(E/A_3).p(A_3)} = \frac{\frac{3}{4}.\frac{50}{100}}{\frac{3}{4}.\frac{50}{100} + \frac{1}{2}.\frac{30}{100} + \frac{1}{4}.\frac{20}{100}}$$

$$p(A_1/E) = \frac{15}{23} \approx 0,65$$

Applications

1 Une urne contient 5 jetons blancs et 3 jetons rouges indiscernables au toucher.
On tire un jeton de l'urne et on regarde sa couleur. S'il est blanc, on le remet dans l'urne et on tire un deuxième jeton. S'il est rouge, on ne le remet pas dans l'urne et on tire un deuxième jeton. On considère les évènements :
A : «On tire un jeton blanc au premier tirage ».
B : «On tire un jeton blanc et un jeton noir».
C : «On tire un jeton blanc au deuxième tirage».
1) Déterminer $p(B/A)$ et $p(B/C)$.
2) Déterminer $p(C/A)$ et $p(C/\overline{A})$. En déduire $p(C)$.
Faire un arbre de probabilité correspondant à la situation.

2 A la sortie d'usine, on a constaté qu'une pièce présente deux sortes de défauts.
8% des pièces présentent le défaut D_1. 15% des pièces présentent le défaut D_2.
5% des pièces présentent à la fois le défaut D_1 et D_2.
On prend une pièce au hasard.
a) Calculer la probabilité que la pièce présente un défaut seulement.
b) Sachant que la pièce présente le défaut D_1, quelle est la probabilité pour qu'elle présente le défaut D_2 ?

3 Un joueur de tennis effectue une mise en jeu. Pour cela il a droit à deux tentatives : un premier service suivi, s'il n'est pas réussi, d'un deuxième service. La probabilité pour que le premier service réussisse est 2/3 ; s'il a échoué, la probabilité pour que le deuxième réussisse est 4/5. Lorsque les deux services échouent, on dit qu'il y'a double faute. Sinon la mise en jeu est réussie.
1) Déterminer la probabilité pour que, sur une mise en jeu, ce joueur fasse une double faute.
2) Déterminer la probabilité pour que la mise en jeu soit réussie.

III. Variables aléatoires.

Activités de découverte

Activité 1 :

a) Un joueur lance un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées 1,2,3,4,5 et 6.
Il gagne 2 dinars s'il obtient la face 6, gagne 1 dinar s'il obtient 2 ou 4 et perd 1 dinar s'il obtient un nombre impair.
Compléter le tableau suivant :

Issue	1	2	3	4	5	6
Gain	-1					

Le tableau précédent permet de définir une application X de l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ vers $\mathbb{R}$ qui à chaque issue associe le gain correspondant

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

• L'application X est appelée **variable aléatoire.**

b) On considère les évènements :
E_1 : « Le joueur gagne 2 dinars ».
E_2 : « Le joueur gagne 1 dinar ».
E_3 : « Le joueur perd 1 dinar ». (il gagne (-1) dinar).
Déterminer $p(E_1)$, $p(E_2)$ et $p(E_3)$

• $p(E_1)$ est la probabilité pour que X prenne la valeur 2, on la note **$p(X = 2)$.**

Compléter le tableau suivant

Gain x_i	-1	1	2
Probabilité $p(X = x_i)$			

Le tableau précédent permet de définir une application de l'ensemble des gains algébriques $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$ vers $[0,1]$. On l'appelle **loi de probabilité** de X et on la note P_X.

$$P_X(x_i) = p(X = x_i)$$

c) Déterminer $P_X(-1)$, $P_X(1)$ et $P_X(2)$ puis $P_X(-1) + P_X(1) + P_X(2)$. Que remarque-t-on ?

Activité 2 :

Le tableau suivant donne des statistiques sur le nombre de voitures par ménage, données en pourcentages de l'ensemble de ménages dans une ville :

Nombre de voitures	0	1	2	3
pourcentages	40%	35%	20%	5%

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque ménage associe le nombre de voitures qu'il possède.

1) a) Déterminer $X(\Omega)$ puis donner, par un tableau, la loi de probabilité de X.
   b) Quelle est la probabilité pour qu'un ménage choisi possède au plus 2 voitures ?
      Au moins 2 voitures ?

. La probabilité pour que la variable X prenne une valeur inférieure ou égale à 2 est notée **$p(X \leq 2)$** et la probabilité pour que la variable X prenne une valeur au moins égale à 2 est notée **$p(X \geq 2)$.**

c) Déterminer $p(X > 1)$ puis $p(X \leq 1)$ et vérifier que $p(X > 1) + p(X \leq 1) = 1$.
   Peut-on prévoir le résultat ?

d) Sachant que le ménage possède au moins une voiture, calculer la probabilité qu'il possède 2 voitures.

Activité 3 :

On reprend l'exemple de l'activité 1.

a) Déterminer $p(X \leq -1)$, $p(X \leq 1)$ et $p(X \leq 2)$.

b) Soit x un réel. Déterminer $p(X \leq x)$ dans chacun des cas suivants :
$x \leq -1$; $-1 < x \leq 1$; $1 < x \leq 2$ et $x > 2$.

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leq x)$.

D'après ce qui précède, on voit bien que F est telle que :

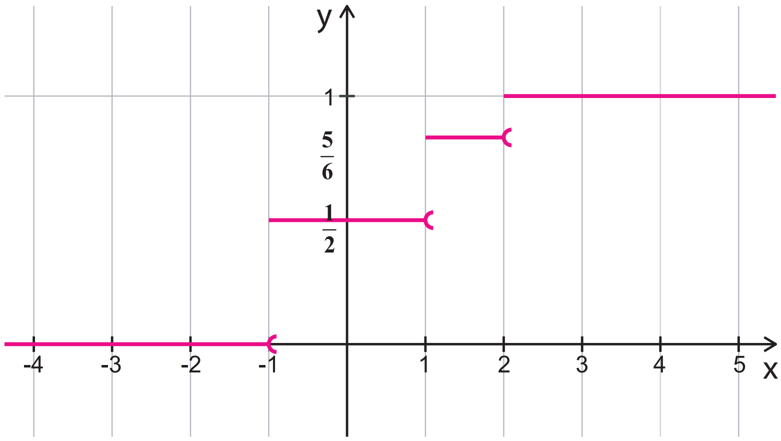
$F(x) = 0$ si $x \in]-\infty, -1[$

$F(x) = \frac{1}{2}$ si $x \in [-1, 1[$

$F(x) = \frac{5}{6}$ si $x \in [1, 2[$

$F(x) = 1$ si $x \in [2, +\infty[$

La figure ci-contre est la représentation graphique de F.



F est appelée **fonction de répartition** de la variable aléatoire X.

c) Vérifier que $p(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1)$ et que $p(-0{,}6 < X \leq 1{,}3) = F(1{,}3) - F(-0{,}6)$

d) Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. En partant de l'égalité $]-\infty, b] =]-\infty, a] \cup]a, b]$ Montrer que $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

A retenir

Définition - Vocabulaire - Notation.

- $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$, étant espace probabilisé fini , on appelle variable aléatoire définie sur Ω toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.
- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ étant l'ensemble des valeurs que prend la variable X, on note $p(X = x_i)$ la probabilité pour que X prenne la valeur x_i.
- L'application de $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vers [0,1] notée P_X ,qui à tout x_i associe $p(X = x_i)$ est appelée loi de probabilité de X. $P_X(x_i) = p(X = x_i)$
- La probabilité pour que X prenne une valeur strictement inférieure à un réel a est notée $p(X < a)$ et la probabilité pour que X prenne une valeur supérieure ou égale à un réel a est notée $p(X \geq a)$.
- On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = p(X \leq x)$.

Propriétés

X étant une variable aléatoire et a étant un réel,

- Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ alors $\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$
- $p(X \leq a) + p(X > a) = 1$
- La fonction de répartition de X est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[, \ldots [x_i, x_{i+1}[, \ldots, [x_n, +\infty[$
- Pour tous réels a et b tels que $a \leq b$ on a : $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

1 On jette deux dés cubiques parfaits dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire qui à toute issue associe la somme des numéros apparus.
a) Définir Ω . Déterminer $X(\Omega)$.
b) Donner, par un tableau, la loi de probabilité de X.
c) Déterminer chacune des probabilités suivantes :
$p(X< 4)$, $p(X \leq 4)$, $p(X > 4)$, $p(X \leq 5)$, $p(3< X \leq 7)$ et $p(2,5 < X \leq 9,12)$

2 Reprendre l'exemple de l'activité 2.
Définir la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative.

IV.Paramètres d'une variable aléatoire.

Activités préliminaires

Activité 1 :

On considère l'exemple de l'activité 1 du paragraphe précédent, et on se demande si le jeu est favorable pour le joueur, c'est-à-dire s'il a plus de chances de gagner que de perdre.
Pour cela on considère le tableau des issues et gains correspondants.

Issue	1	2	3	4	5	6
Gain	-1	1	-1	1	-1	2

a) Calculer la moyenne E des gains du joueur. Le jeu lui est-il favorable ?
b) Vérifier que E peut s'écrire :

$$E = (-1)\, p(X = -1) + 1\, p(X = 1) + 2\, p(X = 2).$$

.Le réel E est appelé **espérance mathématique** de la variable aléatoire X ; on la note **E(X)**.
Plus généralement l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X définie sur Ω prenant des valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ est le réel

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\{\omega\}) \quad \text{ou encore}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X=x_i) = x_1 p(X=x_1)+x_2 p(X=x_2)+\dots+x_n p(X=x_n)$$

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X vue dans l'activité 2 précédente (nombre de voitures par ménage). Interpréter le résultat.

Activité 2 :

1) X étant la variable aléatoire vue précédemment, on considère les variables aléatoires

$$Y = X-1 \quad \text{et} \quad Z = 3X.$$

a) Donner la loi de probabilité de Y et calculer son espérance mathématique.

Vérifier que $E(Y) = E(X) - 1$

b) Donner la loi de probabilité de Z et calculer son espérance mathématique.

Vérifier que $E(Z) = 3E(X)$.

2) X étant la variable aléatoire vue précédemment, on considère la variable aléatoire Y définie sur Ω par le tableau suivant qui représente les gains algébriques d'un joueur qui lance un dé:

ω_i	1	2	3	4	5	6
Y(ω_i)	-3	1	2	1	-2	2

Soit $Z = X + Y$.

a) Donner, par un tableau, la loi de probabilité de Z.

b) Calculer l'espérance mathématique de Z et vérifier que $E(Z) = E(X) + E(Y)$.

Activité 3 :

Les tableaux suivants donnent les lois de probabilité du nombre de réclamations quotidiennes qui parviennent à la direction de deux supermarchés.

Supermarché **A**	
x_i	$p(X = x_i)$
0	0,10
1	0,20
2	0,30
3	0,20
4	0,10
5	0,10

Supermarché **B**	
y_i	$p(Y = y_i)$
0	0,01
1	0,25
2	0,35
3	0,25
4	0,10
5	0,04

a) Calculer E(X) et E(Y) et vérifier que l'on a $E(X) = E(Y) = 2,3$.

- Les variables aléatoires X et Y ont même espérance. Pour faire la distinction entre X et Y on compare les deux réels:

$V(X) = \sum_{i=1}^{5}(x_i - E(X))^2\, p(X = x_i)$ et $V(Y) = \sum_{i=1}^{5}(y_i - E(Y))^2\, p(Y = y_i)$ ou bien on compare les réels : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ et $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$

• Le réel **V(X)** s'appelle **variance** de la variable aléatoire X et σ**(X)** son **écart-type.**

b) Calculer V(X) et V(Y). Comparer V(X) et V(Y). Interpréter le résultat.

2) On considère les variables aléatoires X et Y vues précédemment.
   a) Donner la loi de probabilité de chacune des variables X^2 et Y^2 .
   b) Calculer $E(X^2)$ puis $E(Y^2)$.
   c) Vérifier que l'on a : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ et $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$

Activité 4 :

Soit X la variable aléatoire définie sur Ω et prenant des valeurs $x_1, x_2, \dots. x_n$ et a un réel.

1) On pose $Y = X + a$
   a) Donner l'ensemble des valeurs que prend la variable aléatoire Y.
   b) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots\dots, n\}$ on a : $p(Y = x_i + a) = p(X = x_i)$.
   c) En déduire que $V(X + a) = V(X)$ et $\sigma(X+a)=\sigma(X)$.
2) On suppose a non nul et on pose $Z = a X$.
   a) Donner l'ensemble des valeurs que prend la variable aléatoire Z.
   b) Montrer que pour tout $i \in\{1, 2, \dots\dots, n\}$ on a : $p(Z = ax_i) = p(X = x_i)$.
   c) En déduire que $V(aX) = a^2V(X)$ et $\sigma(aX)=|a|\sigma X)$

A retenir

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire définie sur Ω .

L'espérance mathématique de X est le réel noté E(X) tel que

$$E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)p(\{\omega\})$$

Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\dots, x_n\}$ alors $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(X=x_i)$.

Propriétés

X et Y étant des variables aléatoires définies sur Ω et a un réel.

$$E(X+a) =E(X) + a$$
$$E(aX) = aE(X)$$
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire définie sur Ω et telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\dots, x_n\}$.

• La variance de X notée V(X) est le réel

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 p(X= x_i)$$

- L'écart type de X noté $\sigma(X)$ est le réel

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

Propriétés

X étant une variable aléatoire définie sur Ω et a un réel

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(X + a) = V(X) \qquad \sigma(X+a)=\sigma(X)$$

$$V(aX) = a^2V(X) \qquad \sigma(aX)=|a|\sigma(X)$$

Applications

$\boxed{1}$ Dans une loterie, on dispose de 100 billets parmi lesquels dix donnent un gain de 10 dinars et deux donnent un gain de 100 dinars. Les autres ne font rien gagner.
Une personne achète un billet. Quelle somme espère-t-elle gagner ?

$\boxed{2}$ Les tableaux suivants donnent les probabilités pour qu'un adhérent à une société d'assurance fasse un accident pendant une année et cinq années plus tard.

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4
Probabilité	0,60	0,25	0,12	0,02	0,01

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4
Probabilité	0,65	0,15	0,12	0,05	0,03

Soit X et Y les variables aléatoires représentées respectivement par le premier et le deuxième tableau.

a) Calculer E(X) et E(Y). Interpréter les résultats.

b) Calculer V(X) et V(Y).

c) Calculer $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$. Interpréter les résultats.

V.Schéma de Bernoulli - Loi binomiale.

Activités de découverte

Activité :

Une personne achète des plants de roses. L'expérience consiste à les planter dans son jardin. La probabilité pour qu'un plant germe, une fois planté, est égale à $\frac{4}{5}$.

1) On suppose qu'il a acheté 2 plants et on note X variable aléatoire qui donne le nombre de plants qui ont germé.

Calculer p(X= 0), p(X= 1) et p(X = 2). On pourra pour cela appeler les plants p_1 et p_2 et faire un arbre de choix.

2) On suppose qu'il a acheté 5 plants p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 et on considère l'expérience élémentaire qui consiste à planter un seul plant.

Soit S l'évènement élèmentaire « le plant germe » .

L'expérience a deux issues contraires qu'on peut appeler succès S lorsque le plant germe et échec E ou $\bar{S}$ sinon.

. Cette expérience élèmentaire s'appelle **épreuve de Bernoulli.**

Planter les 5 plants revient à répéter 5 fois l'expérience élémentaire précédente.

Voici une issue.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
	S	S	E	S	S
Probabilité	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$

On voit bien que la probabilité de cette issue est égale à $\left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)$ car le succès de la plantation d'un plant n'influe pas sur le résultat des autres.

a) On remarque que dans ce cas il y a 4 plants qui ont germé ou 4 succès.

Combien y'a-t-il d'issues qui donnent 4 succès ?

b) Voici une issue donnant 2 succès :

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
	E	S	S	E	E
Probabilité	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Calculer la probabilité de cette issue.
Montrer que le nombre d'issues donnant 2 succès est égal à C_5^2 .
c) Donner un exemple d'issue donnant 3 succès et montrer qu'il y'a C_5^3 issues donnant 3 succès.
d) Soit X la variable aléatoire qui à toute plantation de 5 plants associe le nombre de plants ayant germé. Donner la loi de probabilité de X.
e) Calculer E(X) et V(X). Vérifier que $E(X) = 5p(S)$ et $V(X) = 5p(S)\, p\left(\overline{S}\right)$

•La loi de probabilité de X est appelée **loi binominale de paramètres** 5 et $\frac{4}{5}$.

A retenir

Définition et vocabulaire

• On appelle schéma de Bernoulli, une suite d'expériences identiques telles que :

- Chaque expérience ne donne lieu qu'à deux issues : l'une, notée S, appelée succès, l'autre $E = \overline{S}$ appelée échec.
- Les expériences sont indépendantes les unes des autres .

• Les paramètres d'un schéma de Bernoulli sont le nombre d'expériences *n* et la probabilité p de succès d'une expérience élémentaire.

• La loi de probabilité de X qui a chaque issue de n expériences associe le nombre de succès s'appelle loi binomiale de paramètres n et p.

Théorème (admis)

Etant donné une loi binominale X de paramètres n et p on a :

• $p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $k \in \{0,1,2......n\}$

• L'espérance et la variance de X sont $E(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$

Exemple

Dans un stand de tir, un tireur touche la cible avec une probabilité de $\frac{7}{10}$.
Sachant qu'il a tiré quatre fois .

a) Déterminer la probabilité qu'il touche 3 fois la cible.

b) Déterminer la probabilité qu'il touche au plus 2 fois la cible.

c) Sachant que pour chacun de 4 tirs le tireur paie un dinar, et qu'il gagne 2 dinars chaque fois qu'il touche la cible, dire si le jeu lui est ou non favorable.

Solution

Il s'agit dans ce cas d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{7}{10}$.

a) La probabilité qu'il touche trois fois la cible est :

$$p_3 = C_4^3(\frac{7}{10})^3.\frac{3}{10} = 4\frac{1029}{10^4} = \frac{4116}{10000} = 0{,}4116$$

b) L'évènement E : « il touche au moins 2 fois la cible » et l'évènement
F : « il touche la cible moins de 2 fois» sont contraires donc p(E) = 1 - p(F).
F est la réunion des évènements F_0 : « il ne touche la cible aucune fois » et
F_1 : « il touche la cible une fois ».

$$p(F_0) = C_4^0(\frac{7}{10})^0.(\frac{3}{10})^4 = \frac{3^4}{10^4} = 0{,}0081$$

$$p(F_1) = C_4^1(\frac{7}{10})^1.(\frac{3}{10})^3 = 4.\frac{7}{10}.\frac{3^3}{10^3} = 0{,}0756$$

Donc p(F) = 0,0081 + 0,0756 = 0,0837.
Donc la probabilité qu'il touche au moins 2 fois la cible est p(E) = 1 - 0,0837 = 0,9163.
c) Soit X la variable aléatoire qui à chaque épreuve de 4 tirs associe le gain correspondant et X_1 la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où il touche la cible.
On a : $X(\Omega) = \{0,2,4,6,8\}$ et $X_1(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$.
Il est évident que les gains de 0, 2 ,4 , 6 et 8 dinars correspondant respectivement à un nombre de fois où il touche la cible égal à 0, 1, 2, 3 et 4 donc $X = 2X_1$.
Voici le tableau représentant la loi de probabilité de X :

x_i	0	2	4	6	8
$P(X=x_i)$	$(\frac{3}{10})^4$	$4.\frac{7}{10}.(\frac{3}{10})^3$	$6.(\frac{7}{10})^2.(\frac{3}{10})^2$	$4.(\frac{7}{10})^3.\frac{3}{10}$	$(\frac{7}{10})^4$

Pour voir si le jeu est favorable, on calcule l'espérance mathématique de X.

$$E(X) = E(2X_1) = 2.E(X_1) = 2.4.\frac{7}{10} = 5{,}6.$$

L'espérance de gain pour le tireur est 5,6 dinars. Puisqu'il a payé 4 dinars pour 4 tirs, le jeu lui est favorable.

Application

a) Une compagnie a vendu 15 machines à laver avec une garantie d'une année. La probabilité pour qu'au cours de l'année la machine tombe en panne est 0,1. La direction de la compagnie estime qu'elle sera gagnante si au plus 5 machines tombent en panne au cours de l'année. Quelle est la probabilité pour la compagnie d'être gagnante ?
b) X étant la variable aléatoire donnant le nombre de machines tombant en panne au cours de l'année,
- Déterminer $p(X=0)$; $p(X=10)$
- Calculer $E(X)$.

VI.Exemples de variables aléatoires continues.

Activités préliminaires

• Les variables aléatoires qu'on a étudiées précédemment sont définies sur un ensemble fini et prennent un nombre fini de valeurs. Ce sont des variables aléatoires discrètes.

•Cependant certaines variables aléatoires peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné. On les appelle **variables aléatoires continues.**

Parmi les variables aléatoires suivantes, indiquer celles qui sont continues :
a) Le temps que met un coureur pour parcourir 800 mètres.
b) La température d'une personne en bonne santé.
c) Le nombre d'absents dans une classe.
d) Le poids d'un nouveau né.
e) Le montant de la facture d'électricité.
f) Le nombre de repas servis dans un restaurant.

Activités de découverte

Activité 1 :

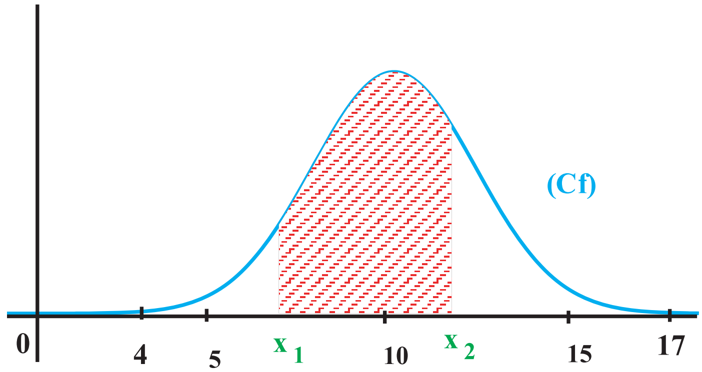
Le tableau suivant représente la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	0,03	0,07	0,30	0,40	0,15	0,05

a) Déterminer $p(X \leq 2)$ et $p(X \geq 3)$
b) Déterminer $p(1<X \leq 4)$ et $p(1 \leq X \leq 4)$
Pour une variable aléatoire continue il n'est pas possible de représenter sa loi de probabilité par un tableau analogue à celui d'une loi discrète.

Activité 2 :

La courbe C_f suivante représente les moyennes générales des élèves d'un grand lycée à la fin d'une année scolaire. Il s'agit de l'histogramme des fréquences de moyennes de tous les élèves, rangés dans des classes d'amplitude 0,1.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque élève associe sa moyenne générale et P sa loi de probabilité.



X peut prendre n'importe quelle valeur de l'intervalle [4,17] et on s'intéresse à la probabilité pour que X soit comprise entre deux valeurs données de [4,17]

- La courbe C_f représente une fonction continue et positive f. La fonction f est appelée la **densité de probabilité** de la variable X.
- On admet que l'aire de la partie hachurée est égale à la probabilité pour qu'un élève pris au hasard ait une moyenne comprise entre x_1 et x_2 c'est-à-dire $p(x_1 \leq X \leq x_2)$.
- La loi de probabilité P de X est une application qui, à tout sous-intervalle $[x_1, x_2]$ de [4,17] associe la quantité $P([x_1, x_2]) = p(x_1 \leq X \leq x_2)$

a) Montrer que $p(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$

b) Les notes étant comprises entre 4,00 et 17,00 ; déterminer, en expliquant, l'intégrale

$$\int_4^{17} f(t)dt$$

c) Soit F la fonction définie sur $[4,17]$ par $F(x) = \int_4^x f(t)dt$

Montrer que F est la fonction de répartition de la variable X.

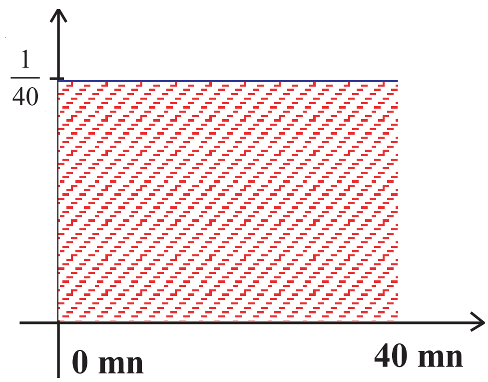
d) Montrer que l'on a $p(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Activité 3 :

Le temps prévu pour l'arrivée d'un train à une station est 0^h10mn.

Les statistiques montrent que l'instant de son arrivée varie entre 0h00mn et 0^h40mn avec la même probabilité.
Soit X la variable aléatoire qui a toute arrivée du train associe son heure d'arrivée et P sa loi de probabilité. D'après les données, **la loi *P* est uniforme** sur l'intervalle $[0,40]$ et sa densité de probabilité f est une fonction constante sur cet intervalle.

Voici sa représentation graphique (on prend la minute comme unité de temps)



1) Déterminer l'aire du rectangle hachuré.
En déduire sa hauteur.
2) Déterminer la probabilité pour que le train

a) Arrive entre 0^h15mn et 0^h20mn

b) Arrive avant l'heure

c) Arrive après 0^h20mn

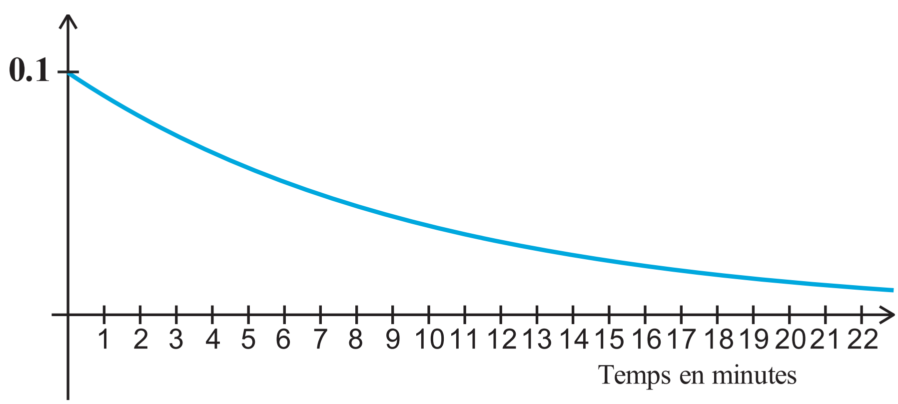
3) Soit F la fonction de répartition de X. Exprimer $F(x)$ en fonction de x dans chacun des cas suivants : $x \leq 0$, $0 < x \leq 40$ et $x > 40$.

Activité 4 :

Au guichet d'une banque, on s'intéresse à l'intervalle de temps entre deux arrivées successives de clients. Soit X la variable aléatoire qui donne, en minutes, la durée de cet intervalle. Les statistiques montrent que X est une variable aléatoire dont la densité de probabilité est définie par : $f(x)=\lambda\, e^{-\lambda x}$ où λ est un réel strictement positif .

• On dit que la variable aléatoire X suit **une loi exponentielle de paramètre** λ, ou que la loi de probabilité de X est une loi exponentielle de paramètre λ .

Voici la courbe représentative de f dans le cas $\lambda = 0{,}1$

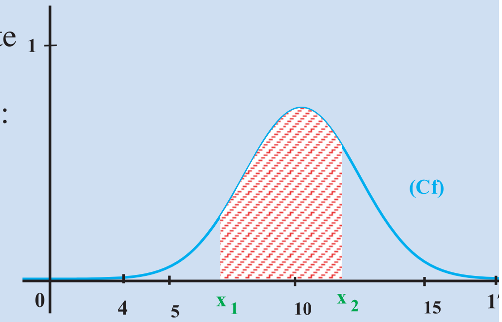


1) Calculer la probabilité pour que l'intervalle entre deux arrivées successives ait une durée :
   a) Inférieure à 2 minutes.
   b) Supérieure à 2 minutes.
   c) Comprise entre 2 minutes et 3 minutes.
2) Soit F la fonction du répartition de X. Montrer que $F(x) = 1 - e^{-0{,}1x}$

A retenir

Définition :

. Une variable aléatoire continue est une variable aléatoire X qui peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné.
On s'intéresse alors à des évènements du type :
« La valeur de X est comprise entre x_1 et x_2 où x_1 et x_2 sont deux réels donnés ».



. X étant une variable aléatoire prenant des valeurs dans $[a,b]$,
- On appelle densité de probabilité de X la fonction f positive et continue sur $[a,b]$ telle que :

$\int_a^b f(t)dt = 1$ et pour tous x_1 et x_2 de l'intervalle $[a,b]$

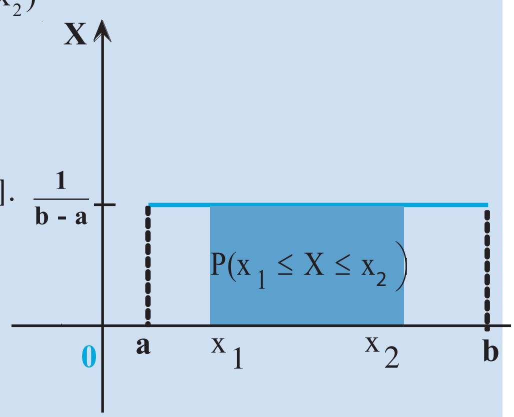
$$p(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

- La loi de probabilité P de X est l'application qui, à tout sous-intervalle $[x_1, x_2]$ de $[a,b]$ associe la quantité $P([x_1, x_2]) = p(x_1 \leq X \leq x_2)$

Définition

On appelle loi uniforme sur $[a,b]$ la loi de probabilité dont la densité f est

la fonction constante égale à $\dfrac{1}{b-a}$ sur $[a,b]$.



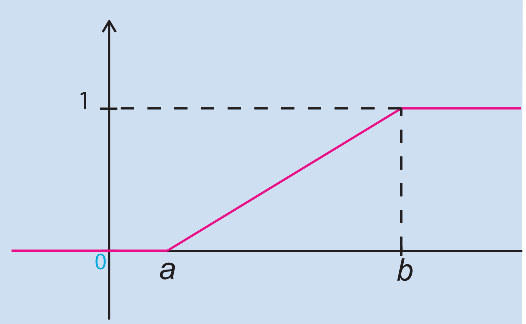
Conséquences

. $x_1$et x_2 étant deux réels de l'intervalle $[a,b]$ et X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a,b]$ on a :

$$P([x_1, x_2]) = p(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}$$

. La fonction de répartition de X est définie sur IR par

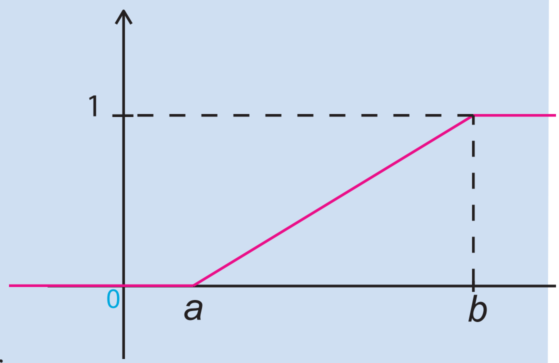
$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x < b \\ 1 & si \quad x \geq b \end{cases}$$



Définition

Soit λ un réel strictement positif. On appelle loi exponentielle de paramètre λ la loi de probabilité dont la densité *f* est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$$



Conséquences

- Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ alors, pour tous réels positifs *a* et *b* tels que $a \leq b$:

$$P([a,b]) = p(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

- On a $p(X \geq a) = e^{-\lambda a}$
- La fonction de répartition de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple 1

Un appareil de mesure évalue l'épaisseur (en cm) de pièces mécaniques. L'expérience prouve que l'épaisseur des pièces peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme dans l'intervalle [2 ; 2,8]

1) Calculer $P(X \leq 2{,}6)$ et $P(2{,}3 \leq X \leq 2{,}5)$.

2) Les pièces sont acceptées si leur épaisseur est supérieure à 2,4 cm. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit acceptée ?

3) Une pièce a une épaisseur supérieure à 2,2 cm. Quelle est la probabilité qu'elle soit acceptée ?

Solution

1) X suit la loi uniforme et elle est à valeurs dans [2 ; 2,8]

$$P(X \leq 2{,}6) = \frac{2{,}6-2}{2{,}8-2} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75 \ .$$

$$P(2{,}3 \leq X \leq 2{,}5) = \frac{2{,}5-2{,}3}{2{,}8-2} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25$$

2) La probabilité pour qu'une pièce soit acceptée est $P(X \geq 2{,}4) = \frac{2{,}8-2{,}4}{2{,}8-2} = \frac{0{,}4}{0{,}8} = 0{,}5$

3) Soit A : « la pièce est acceptée » et B : « la pièce a une épaisseur supérieure à 2,2 cm ».

La probabilité demandée est $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

On a $A \quad B = A$ donc $P(A/B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$.

On a $P(B) = \dfrac{2{,}8 - 2{,}2}{2{,}8 - 2} = 0{,}75$ d'où $P(A/B) = \dfrac{0{,}5}{0{,}75} = \dfrac{2}{3}$.

Exemple 2

Le temps, en minutes, que passe un médecin pour consulter un patient est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

a) Quelle est la proportion de patients qui passent plus de 15 minutes avec le médecin ?

b) Quelle est la probabilité qu'un patient passe entre 5 mn et 10 mn pour une auscultation ?

Solution

a) La probabilité demandée est : $P(X \geq 15) = e^{-0{,}1.15} = e^{-1{,}5} \approx 0{,}22$.

Il y'a 22% de patients qui passent plus de 15 minutes avec le médecin.

b) La probabilité demandée est : $P(5 \leq X \leq 10) = e^{-0{,}1.5} - e^{-0{,}1.10} = e^{-0{,}5} - e^{-1} \approx 0{,}23$

Applications

1 Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à une station.
Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station.
On suppose que X suit la loi uniforme sur [0 ; 6].

a) Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

b) Donner l'expression de la fonction de répartition F de X et la représenter graphiquement.

2 On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0,05.

a) Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie ; 20 ans de durée de vie

b) On sait qu'une voiture est agée de 10 ans.
Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 15 ans de durée de vie ?

c) Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse cinq ans.

d) Donner l'expression de la fonction de répartition F de X et la représenter graphiquement.

3 Le temps X (en minutes) mis pour trouver la cause d'une erreur dans un programme d'ordinateur suit la loi exponentielle dont la densité est définie par $f(x) = 0{,}02\, e^{-0{,}02\, x}$.

a) Représenter graphiquement la fonction f.

b) Calculer la probabilité pour que la durée de la recherche d'erreur dépasse 1h.

c) Calculer la probabilité pour que la durée soit inférieure à un quart d'heure.

Situation 1

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une par une au hasard et avec remise les boules de l'urne jusqu'à ce que l'on tombe pour la première fois sur un numéro obtenu auparavant.

1) On suppose n = 3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui donne le nombre de tirages effectués.

2) On suppose n quelconque

a) Déterminer $p(X > 2)$, $p(X>3)$.

b) Montrer que pour tout k appartenant à $\{2, 3, 4, \ldots, n\}$ on a : $p(X > k) = \dfrac{A_n^k}{n^{k+1}}$

En déduire la loi de probabilité de X.

Situation 2

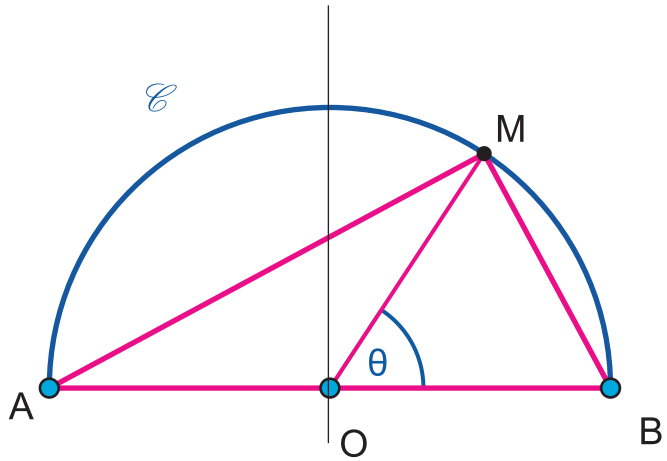
La figure ci-contre représente un demi-cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
Un point M pris au hasard sur $\mathscr{C}$. Soit θ l'angle $\widehat{BOM}$. On suppose que le choix du point M sur le demi cercle $\mathscr{C}$ suit une loi uniforme.

a) Montrer que θ suit une loi uniforme.

b) Calculer l'aire A du triangle ABM.

c) Montrer que : $A \geq 0{,}5$ équivaut à : $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$.

En déduire la probabilité pour avoir $A \geq 0{,}5$.



Ce programme calcule la probabilité d'une loi uniforme ou d'une loi exponentielle entre a et b

```
program LoiContinues;
uses wincrt ;
var choix:integer;a,b,lambda:real;
  procedure affiche(Proba:real);
      begin
  clrscr;
  if choix=2 then
  begin
      writeln('                                Loi exponentielle      ');
          writeln('lambda = ',lambda);
     end
     else
     begin
      writeln('                                Loi uniforme     ');
      end;
      writeln('a = ',a:0:4,' et  b = ',b:0:4);
     writeln('p[a,b] = ',Proba:0:15);
          end;
   procedure LoiUniforme;
   var p:real;
  begin
  clrscr;
     writeln('                             Loi uniforme     ');
  Writeln('Donner a et b');
     repeat
   readln(a);readln(b);
   until (a<b);
   p:=1/(b-a);
   affiche(p);
   end;
    procedure LoiExronontielle;
   var p:real;
  begin
  clrscr;
  writeln('                               Loi exponentielle     ');
  Writeln('Donner a et b');
   repeat
   readln(a);readln(b);
    until (a<b);
  Writeln('Donner Lambda ');   readln(lambda);
```

```
        p:=exp(-lambda*a)-exp(-lambda*b);
    affiche(p);
  end;
 procedure Saisie;
 begin
 Writeln('donner un nombre (1 ou bien 2)   1: loi uniforme 2 : Loi exponentielle');
   repeat
 readln(choix);
 until (choix=1) or (choix=2);
 if choix=1 then  LoiUniforme
   else LoiExronontielle;
  end;
begin      {Programme principal }
saisie;
end.
```

1 Une urne contient 10 boules : cinq blanches numérotées 1,1,2 ,3 trois noires numérotées 1 ,1 ,2 et deux rouges numérotées 1 ,3.

1) On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne . Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Avoir une somme égale à 5 »

B : « Avoir 2 boules blanches et une boule noire »

2) On tire au hasard et successivement et sans remise 3 boules de l'urne

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

C :« Avoir une seule boule rouge »

D :« Avoir dans l'ordre 1, 2 ,3 »

3) On tire au hasard et successivement et avec remise 3 boules de l'urne .Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E :«Avoir au moins une boule rouge »

F :« Avoir trois boules de couleurs différentes »

2 Un dé truqué a les faces numérotées de 1 à 6. On désigne par p_i la probabilité d'une face n°i et on donne $p_1 = p_3 = p_5 = \alpha$ et

$p_2 = p_4 = p_6 = 2\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$.

1) Calculer α. (On rappelle que

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\{\omega\}) = 1)$$

2) Quelle est la probabilité d'une face portant un numéro pair ?

3 Une certaine équipe de football possède une probabilité de 0,6 de remporter une victoire (V),une probabilié de 0,3 de subir une défaite (D) ,et une probabilité de 0,1 de faire match nul (N).l'équipe joue trois matches .

1) Faire un arbre de choix .

2) Déterminer les élèments de l'évènement A tel que l'équipe gagne au moins deux fois et ne perde pas, et calculer P(A)

3) Déterminer les élèments de l'évènement B tel que l'équipe gagne et fasse un match nul,et calculer P(B)

4 1) Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 12 des 24 leçons. On a mis 24 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons indépendantes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers. On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

Quelle est la probabilité

a) qu'il ne connaisse aucun de ces sujets?

b) qu'il connaisse les deux sujets ?

c) qu'il connaisse un et un seul de ces sujets?

d) qu'il connaisse au moins un de ces sujets?

2) On considère maintenant que l'élève a étudié n des 24 leçons (n étant un entier naturel inférieur ou égal à 24).

a) Quelle est la probabilité P_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets?

b) Déterminez les entiers n tels P_n soit supérieur ou égal à 0,95.

5 Dans un groupe de 60 personnes, le quart porte des lunettes et 40% sont fumeurs. De plus, 5 personnes sont fumeurs et portent des lunettes. Faire un arbre de probabilité correspondant à la situation avec L : « portent des lunettes» et F : « est fumeur».

6 On lance un dé régulier à six faces.

Calculer la probabilité que le résultat soit :

a) pair et strictement supérieur à 4 ;

b) pair sachant qu'il est strictement supérieur à 4 ;

c) strictement supérieur à 4 sachant qu'il est pair.

7 Une urne contient quatre jetons blancs portant les numéros 1, 1, 2, 2 et cinq jetons noirs portant les numéros 1, 1, 2, 2, 2.
On tire au hasard et simultanément deux jetons de l'urne.
Soit A l'évènement « On obtient deux jetons noirs » et B l'évènement « On obtient deux jetons portant le numéro 1 ».
Déterminer $p(A/B)$, $p(\overline{A}/B)$ et $p(A/\overline{B})$,.

8 Le directeur d'une fabrique de microprocesseurs constate que 4% de la production journalière est défectueuse. Un responsable qualité propose une vérification systématique des microprocesseurs. Cette vérification n'est pas parfaite, elle ne détecte que 95% des microprocesseurs défectueux et déclare défectueux 2% des microprocesseurs qui ne présentent pourtant aucun défaut.
On prend au hasard l'un des microprocesseurs dans une production journalière. On appelle :
- M l'évènement : «le microprocesseur est défectueux» ;
- R l'évènement : « le microprocesseur est rejeté après vérification ».

1) Préciser les probabilités : $p(M)$, $p(R/M)$, $p(R/\overline{M})$.
2) Calculer la probabilité de l'évènement (M et R) ainsi que celle de l'évènement ($\overline{M}$ et R).
3) Calculer la probabilité que le microprocesseur soit défectueux et déclaré bon par la vérification.
4) Calculer la probabilité que le microprocesseur soit bon sachant que la vérification va le déclarer «à rejeter».

9 Dans un campus universitaire, à l'issue d'une compétition, 1250 athlètes subissent un test antidopage. Le test n'est pas sur à 100%, certains athlètes peuvent être dopés et avoir cependant un test négatif. De même, des athlètes sains peuvent avoir un test positif.
Le tableau ci-dessous donne la répartition des 1250 athlètes en fonction du test et de l'état

	Test négatif	Test positif
Athlète sain	1188	12
Athlète dopé	1	49

réel de l'athlète :
1) On choisit au hasard un athlète.
Déterminer la probabilité des évènements suivants : S : «L'athlète est sain» et T : «Le test est positif»
2) On choisit au hasard un athlète sain
Quelle est la probabilité qu'il ait un test positif ?
3) A l'aide des informations données dans le tableau, faire un arbre de probabilité.

10 Une personne choisie au hasard parmi la population d'une région passe un test pour dépister une maladie.
Dans cette région, on a établi par sondage dans les hopitaux que :
- Si une personne a la maladie, alors le test est positif dans 96% des cas,
- Si une personne n'a pas la maladie, alors le test est négatif dans 94% des cas.
- Une personne sur 65 est atteinte de cette maladie.

a) Faire un arbre de probabilité correspondant à cette situation.
b) Le résultat du test est positif, quelle est la probabilité que cette personne soit atteinte de cette maladie ?

11 Soient deux évènements A et B vérifiant

$p(A) = \frac{3}{5}$, $p(B) = \frac{7}{10}$ et $p(A \cup B) = \frac{9}{10}$.

1) Calculer $p(\overline{A})$.
2) Calculer $p(A \cap B)$. A et B sont-ils indépendants ?
3) Calculer $p(A/B)$, $p(\overline{A}/B)$ et $p(B/\overline{A})$.

12 Dans une région, 45% de la population active sont des hommes. On sait aussi que 5% des femmes et 4% des hommes de cette population active sont au chômage.On interroge au hasard une personne de cette région.
Notons F l'évènement : « être une femme » et C l'évènement : « être en chômage ».
1) Calculer p(F), $p(\overline{F})$, p(C/F) et $p(C/\overline{F})$.
2) Calculer la probabilité pour qu'un individu de cette population active interrogé soit au chômage.
3) Sachant que la personne choisie est au chômage, quelle est la probabilité pour que ce soit :
a) Une femme?
b) Un homme?

13 Une urne contient 8 boules blanches et 4 noires
1) On tire 3 boules simultanément. Quelle est la probabilité pour qu'elle soient toutes de même couleur ?
2) On en tire 3 boules successivement, en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne et on considère l'aléa numérique X égal au nombre de boule noires tirées.
a) Etablir le tableau de loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique E(X),la variance V(X) et l'écart type σ(X).

14 On lance deux dés réguliers et on relève la somme X des points marqués.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) On vous propose le jeu suivant : On mise 10 D, puis on lance les dés. Si $X > 9$, on gagne 50D, sinon on perd la mise.
Le jeu est-il équitable ? Sinon, est-il favorable ou défavorable ?

15 Un questionnaire à choix multiples consiste à répondre successivement à quatre questions indépendantes.
Pour chaque question trois réponses sont proposées, dont une seule est correcte.
Un candidat répond au hasard à chaque question.
1) On appelle X le nombre de bonnes réponses. Etudier X (loi de probabilité, espérance, écart-type).
2) On appelle Z le score du candidat. Sachant que chaque bonne réponse rapporte deux points et chaque mauvaise réponse enlève un point, étudier Z.

16 La probabilité pour qu'une personne ait une mauvaise réaction à un vaccin est de 0,01.
1) Tous les membres d'une famille de cinq personnes ayant été vaccinés, quelle est la probabilité qu'il y ait une mauvaise réaction :
a) chez 2 membres de la famille
b) chez moins de 2 membres de la famille.
2) Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de mauvaises réactions au vaccin dans une famille de 7 personnes.
a) Donner la loi de probabilité de X.
b) Déterminer E(X) et V(X).

17 Un appareil de jeu contient 6 boules blanches et 3 boules rouges. Quand un joueur introduit un jeton dans l'appareil, 3 boules prises au hasard tombent.
Si les 3 boules sont rouges, le joueur gagne 100 D. Si 2 des 3 boules sont rouges,

le joueur gagne 15 D. Si une seule des 3 boules est rouge, le joueur gagne un lot de 5 D. Le forain qui utilise l'appareil fixe le prix du jeton à 8 D.

1) Soit X la variable aléatoire désignant la somme gagnée par le joueur.

a) Déterminer la loi de X.

b) Calculer son espérance.

c) En déduire le gain moyen du forain.

2) L'appareil n'est pas assez rentable. Aussi, le forain envisage 2 solutions : vendre le jeton 9 D ou bien rajouter une boule blanche.

Quelle est la solution la plus rentable pour lui ?

18 Une boite contient trois boules blanches numérotées **1, 1, 2** et deux boules rouges numérotées **2, 2** indiscernables au toucher.

1) Une épreuve consiste a tirer au hasard, successivement et sans remise deux boules de la boite. On désigne par X l'aléa numérique égal au produit des deux numéros obtenus.

Déterminer la loi de probabilité de X.

On pose S = (X=2). Vérifier que $P(S)=\frac{3}{5}$.

2) On répète l'épreuve précédente 4 fois de suite en remettant les deux boules tirées dans la boite. On désigne par Y l'aléa numérique égal au nombre de fois ou S est réalisé.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Calculer E(Y) et V(Y).

19 Tous les élèves d'un lycée ont un temps de trajet domicile lycée au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur [0; 1]. On interroge au hasard un élève de ce lycée.

Quelle est la probabilité pour que l'élève interrogé ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 20min ?

20 Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à une station bien déterminée.

Soit T le temps d'attente d'une personne à cette station.

On suppose que T peut prendre n'importe quelle valeur de l'intervalle [0, 6].

1) Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

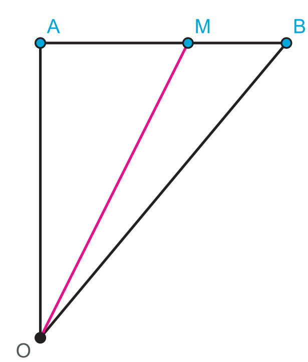
2) Quelle est la probabilité que cette personne attende plus que 5 minutes ?

21 Soit OAB un triangle rectangle isocèle de côté 1 (voir fig. ci-dessous). Un point M étant pris au hasard sur [AB] (c'est-à-dire selon la loi uniforme sur [0, 1]), on considère la variable aléatoire OM.

a) Montrer que $1 \leq OM \leq \sqrt{2}$.

b) Calculer la probabilité que $OM \leq a$

(a est un réel donné dans $\left[1, \sqrt{2}\right]$).



22 Le temps de réponse (en secondes) à un terminal relié à un ordinateur suit une loi exponentielle de paramètre 0,3.

1) Quelle est la probabilité que le terminal attende entre 3 et 8 secondes ?

2) Quelle est la probabilité que le terminal attende plus que 8 secondes ?

23 Soit D une droite graduée. On choisit au hasard un point *M* du segment [*AB*] avec A d'abscisse 2 et B d'abscisse 4. On note *x* d'abscisse du point M.

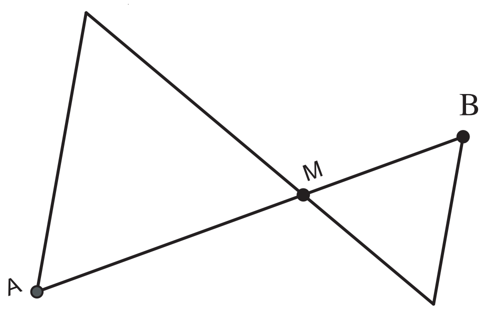
1) Quelle est la probabilité que $x \in [2, 3]$?

2) Quelle est la probabilité que M soit le milieu du segment $[AB]$?

24 Un point M étant choisi au hasard sur le segment [AB] de longueur 4 cm, on construit un triangle équilatéral au-dessus de [AB] et un autre au-dessous de [AB] comme indiqué dans la figure ci-dessous :

1) Quelle est la probabilité pour que les deux triangles aient la même aire ?

2) Quelle est la probabilité pour que la somme des deux aires soient supérieure où égale à $4\sqrt{3}$?



25 On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est la variablealéatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1/10. Vous arrivez à une cabine téléphonique et juste à ce moment précis, une personne passe devant vous pour téléphoner.

a) Quelle est la probabilité que vous attendiez plus de 10 mn ?

b) Quelle est la probabilité que vous attendiez entre de 10 mn et 20 mn ?

26 Le temps , en minutes, d'attente à un guichet est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
On sait de plus que la valeur moyenne d'attente à ce guichet est de 8 minutes.

1) On admet que l'attente moyenne à un guichet est la limite quand A tend vers $+\infty$ de :

$$\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

Montrer que: $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \dfrac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$

En déduire que $\lambda = 0{,}125$.

2) Quelle est la probabilité pour que le temps d'attente à ce guichet soit inférieur ou égal à 5 minutes ?

3) Quelle est la probabilité pour que le temps d'attente appartienne à l'intervalle $[10;20[$?

4) Sachant qu'un client a déjà attendu 15 minutes, quelle est la probabilité pour qu'il attende moins de 45 minutes au total ?

27 **1)** La durée de vie, en années, d'un certain type de lampe est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1/5)
Calculer $P([0,4])$, $P([4,6])$, $P([3,+\infty[)$.

2) Exprimer en fonction de x, la fonction de survie S définie par $S(x) = P(X > x)$.

3) Sachant que la vie moyenne d'un tel type de lampe est égale à 5 ans, calculer la probabilité de survie au-delà de la vie moyenne.

4) Sachant que la lampe est âgée de 10 ans, calculer la probabilié que la lampe dure 5 années supplémentaires au moins.

Les premiers écrits sur les probabilités sont l'oeuvre de Jérôme Cardan (1501-1576), qu'un de ses biographes a surnommé « le joueur savant ». Un problème qui intéressait Cardan était le suivant : comment doit-on répartir les mises d'un jeu de dés si le jeu venait à être interrompu ? La même question fut posée en 1654 à Blaise Pascal par son ami le Chevalier de Méré, qui était un joueur impénitent. Un joueur parie qu'il tirera un as en huit coups de dés, mais la police interrompt le jeu après le troisième coup. Les assistants protestent, mais comment doit-on répartir les mises ? Cette question fut à l'origine d'une correspondance entre Pascal et Fermat, et leurs réflexions furent publiées en 1657 dans Tractatus de ratiociniis in aleae ludo (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). L'auteur est le néerlandais Christian Huygens, plus connu pour ses travaux en astronomie et en physique. C'est donc à partir de problèmes posés par les jeux de hasard que se définirent les concepts et les premières approches de cette nouvelle branche des mathématiques.
On avait observé que, lorsque l'on répétait de nombreuses fois la même expérience, les fréquences tendaient à se stabiliser. On savait de plus que ces fréquences se stabilisaient autour des probabilités, lorsque celles-ci étaient connues. Ainsi, dans le cas d'un dé, au bout d'un grand nombre de tirages, chaque face était obtenue environ une fois sur six. Cette observation empirique pouvait-elle recevoir un fondement théorique ?
Le premier à se poser la question est le balois Jacques Bernoulli, fils de Nicolas Bernoulli, premier membre d'une longue dynastie de mathématiciens, dont les plus célèbres sont Jacques, Jean (son frère) et Daniel (le fils de Jean). Jacques Bernoulli a écrit Ars Conjectandi, qui ne sera publié qu'après sa mort en 1713 par son neveu Daniel. Au $19^{ème}$ siècle, la croissance rapide des sciences rendit nécessaire l'extension de la théorie des probabilités au delà des jeux de hasard. Elle devint très utilisée en économie et dans le domaine des assurances.
Pour faire de la théorie des probabilités une discipline à part entière, il ne manquait finalement plus qu'une chose : une définition précise de son objet, la probabilité.
C'est Laplace qui s'en charge dans son ouvrage Théorie analytique des probabilités, paru en 1812 :
« La probabilité est une fraction dont le numérateur est le nombre de cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles. »
D'autres noms importants dans le domaine des probabilités sont Abraham de Moivre (1667-1754), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Denis Poisson (1781-1840), Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894), Andrei Andreeivich Markov (1856-1922) et Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987).