REPUBLIC OF CAMEROUN
Peace-work-Fatherland
****
ADAMAWA REGION
****
REGIONAL DELEGATION OF SECONDARY EDUCATION
****
DIVISIONAL DELEGATION OF VINA
****
NGAOUNDERE II SUBDIVISION
****
DOLPHINS BILINGUAL HIGH SCHOOL
P.O.BOX 573 NGAOUNDERE TEL: 243 287757
Email: ddolphinschool@yahoo.fr

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
PAIX-Travail- Patrie
****
REGION DE L'ADAMAOUA
****
DELEGATION REGIONALE DES ENSEGNEMENTS SECONDAIRES
****
DELEGATION DEPARTEMENTALE DE LA VINA
****
ARRONDISSEMENT DE NGAOUNDERE II
****
COLLEGE BILINGUE LES DAUPHINS
B.P. 573 NGAOUNDERE TEL: 243 287757

EP. MATHS	CLASSE : Tle	C.C N°02	NOTE : ……20	21 FEV 2023	COEF : 07	DUREE :04H

CONTROLE N°2 TERMINALE C

EXERCICE 1 :01 POINT

Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 de l'entier naturel :
N=999999888888777777666666555555444444333333222222111111000000.

EXERCICE 2 : 03,25 POINTS

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ direct. On définit l'application f par son expression analytique : $\begin{cases} x' = x + y + 3 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$. Soit $(\prod)$ l'ensemble des points M(x ;y) du plan tels que : $5x^2+5y^2 - 6xy - 16 = 0$. On considère les points Z_A, Z_B et Z_C d'affixes respectifs i+$\sqrt{3}$, -i+3 et 2i ; le point D est le centre de $(\sum')$ et S une similitude directe transformant A en B et C en D.

1°) Montrer que f est bijective. **0,25PT**
2°) Donner l'écriture complexe de f et en déduire sa nature et les éléments caractéristiques de f. **0,5PT**
3°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques $(\sum')$ image de l'ensemble des points M(x ;y) du plan tels que $(\sum) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. **0,5PT**
4-a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $(\prod')$ image de $(\prod)$ par f. **0,5PT**
b) En déduire que $(\prod)$ est une conique dont on précisera la nature, les foyers et les sommets dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du plan. **0,5PT**
5°) Construire $(\prod)$ et $(\prod')$ dans un même repère du plan. **0,5PT**
6°) Déterminer les éléments caractéristiques de S. **0,5PT**

EXERCICE 3 :03,5 POINTS

I –Pour tout entier naturel n, on pose $I_n=\int_0^1 \frac{e^{nx}d(x)}{1+e^x}$.
1°) Calculer I_1 ; I_0+I_1 et en déduire la valeur de I_0. **0,75PT**
2-a) Calculer $I_{n+1}+I_n$ et donner la monotonie de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout x élément de l'intervalle $[0;1]$. **0,5PT**
b) Prouver que pour tout x de l'intervalle $[0;1]$, on a : $\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{e^{nx}}{2}$. **0,25PT**
c) Calculer la limite I_n.(On pourra encadrer d'abord I_n). **0,25PT**
3°) Calculer la limite de la suite $J_n=\int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^n+e^{n+x}}d(x)$. **0,5PT**

II –Pour tout entier naturel n fixé tel que n≥ 1, on considere la suite la suite U_n définie par :
$U_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n!}$ et la fonction f définie sur $[0;1]$par :
f :x$\longmapsto e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)$.
1°) Montrer que f est dérivable sur $[0;1]$ et que f'(x)=$-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$. **0,5PT**
2°) Déduire que pour tout x élément de l'intervalle $[0;1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{n!}$. **0,25PT**
3°) Montrer que $\left|\frac{1}{e}U_n - 1\right| \leq \frac{1}{n!}$ et en déduire la limite de U_n. **0,5PT**

EXERCICE 4 :07,5 POINTS

Dans toutes les parties, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2cm.

PARTIE_A : On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par u(x)=$\sqrt{x^2+1} - x$ et on désigne par (C_1) sa courbe représentative dans un repère du plan.
1°) Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction u.**0,5PT**
2-a) Montrer que u(x)+2x tend vers 0 quand x tend vers -∞. **0,25PT**
b) Montrer que $\forall x\epsilon\mathbb{R}$, on a u(x)> 0.En deduire le signe de u(x)+2x. **0,5PT**

http://sujetexa.com

c) Interpréter graphiquement ces résultats. **0,25PT**

3-a) Montrer que la dérivée de la fonction u est définie sur ℝ par u'(x)=$\frac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$. **0,25PT**

b) Etudier les variations de la fonction u. **0,25PT**

4°) Tracer la courbe (C_1) et son asymptote oblique. **0,5PT**

PARTIE B : On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x)=$\int_0^x \frac{-1}{\sqrt{t^2+1}}d(t)$ et (C_2) sa courbe.

1°) Montrer que pour tout réel x, on a f(x)=ln(u(x)). **0,25PT**

2°) Calculer les limites de f en $\pm\infty$ et étudier ses variations. **0,5PT**

3-a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C_2) au point d'abscisse x_0=0. **0,25PT**

b) Soit maintenant la fonction φ définie sur ℝ par $\varphi(x) = f(x) + x$. Montrer que φ est croissante et que $\varphi(0) = 0$. En déduire la position de la courbe (C_2) par rapport à sa tangente T. **0,75PT**

4°) Tracer sur le même graphique la courbe (C_2) et la tangente T. **0,5PT**

PARTIE C : 1°) On pose $\propto = \frac{1-e^2}{2e}$. Montrer que $u(\propto) = e$ et en déduire f(∝). **0,5PT**

2°) A l'aide d'une intégration par partie, calculer $\int_{\propto}^{0} ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)dx$. **0,25PT**

3°) V est une primitive de u et g la fonction définie sur ℝ par g(t)=$\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ .a) Montrer que u(g(t))=e^{-t}.**0,5PT**

b) Justifier que V∘ g est dérivable sur ℝ et que sa derivee est définie par $(V\circ g)'(t) = \frac{1+e^{-2t}}{2}$. **0,5PT**

c) En déduire que V(0)-V(∝) $= (V \circ g)(0) - (V \circ g)(-1) = \int_{\propto}^{0} \left(\frac{1+e^{-2t}}{2}\right) dt$, puis que $\int_{\propto}^{0} u(x)dx = \frac{e^{\propto}+1}{4}$. **0,5PT**

4°) On admet que pour tout x réel, f(x)<u(x). Déduire l'aire du domaine limité par les courbes (C_1) et (C_2) et les droites d'équations x=∝ et x=0. **0,5PT**

EXERCICE 5 : 03,5 POINTS

I –Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On pose : $Z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et Z_2=1+i.

1) Déterminer la forme exponentielle de Z_1; Z_2 et Z= $Z_1\times Z_2$. **0,75PT**

2) Déterminer la forme algébrique de Z. **0,25PT**

3) En déduire la valeur exacte de cos($\frac{\pi}{12}$) et de sin($\frac{\pi}{12}$). **0,25x2=0,5PT**

4)Démontrer que l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(1+i)^n$ soit un réel est 4ℤ. **0,25PT**

5°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : arg(Z+1)≡ $\frac{\pi}{6}[2\pi]$. **0,25PT**

II –Soit a et b deux nombres complexes non nuls différents de 1 dont a est une racine cinquième de 1, b est une racine septième de 1 et on considère la fonction f définie sur ℝ par f(x)= $\frac{1-x^6}{1-x}$.

1°) Montrer que $1+a+a^2+a^3+a^4=0$. **0,25PT**

2°) Calculer $1+2a+3a^2+4a^3+5a^4$. (on pourra remarquer que $f'(x)=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$). **0,25PT**

3°) Montrer que $\frac{b}{1+b^2} + \frac{b^2}{1+b^4} + \frac{b^3}{1+b^6} = -2$. **0,25PT**

4°) Soit x une racine n^{ieme} de l'unité diffèrent de 1. Calculer $S=1+2x+3x^2+\ldots\ldots+nx^{n-1}$. **0,25PT**

5°) En déduire que $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*$, $1+4+12+\ldots\ldots+n\times 2^{n-1} = (n-1)2^n + 1$. **0,5PT**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES :02,25 POINTS

SITUATION PROBLEME :

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparait périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard (J_0+6), il observe le corps B, donc la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 , le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Tâche1 : Soit u et v le nombre de périodes éffectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple (u ;v) est solution de l'équation (E) :35x-27y=2……………………………………………………………**0,75 PT**

Tâche2 : Déterminer les solutions de l'équation (E) et le couple (u ;v) permettant de déterminer J_1………..**0,75 PT**

Tâche3 : Le jour J_0 était mardi 7 décembre 1999, quelle sera la date exacte du jour J_1.
(Rappelons que l'an 2000 était une année bissextile) ……………………………………………………………**0,75 PT**

N.B : L'épreuve est notée sur 21points ce qui signifie 1point de bonus……………………………***BONNE CHANCE !***

http://sujetexa.com