REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
****
REGION DE L'OUEST
****
DELEGATION DEPARTEMENTALE DE LA MIFI
****
LYCEE BILINGUE DE TOUGANG II B.P : 1033 BAFOUSSAM II
****
Email : lytougang2@ahoo.com
N° IMMATRICULATION : **4KE1GSFD110495106**

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace – Work – Fatherland
****
WEST REGION
****
DIVISIONAL DELEGATION OF MIFI
****
G.B.H.SCHOOL TOUGANG II P.O Box : 1033
****
Email : lytougang2@ahoo.com
N° IMMATRICULATION : **4KE1GSFD110495106**

Examen de fin de 5ème Séquence — **Classe de Tle D**
Avril 2023 — **Durée : 4h**
Proposé par : TSOMENE Barthelemy — **Coef : 4**

Partie I : Evaluation des ressources /15pts

Exercice 1 : /03.25pts

On définit le polynôme p de la variable complexe définie par : $P(z) = z^3 - (5+2i)z^2 + (5+4i)z - 9 + 2i$.

1) Montrer que p abmet une solution imaginaire pure z_0, puis déterminer les nombres complexes a et b tels que : $p(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$. /0.5pt
2) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$. /0.75pt
3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $-i$, $4+i$ et $1+2i$. $(\mathcal{C})$ est l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 4 - i| = 2$ On considère la similitude directe f de centre A et qui transforme B en C.

a) Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$, et en déduire la nature exacte du triangle ABC. /0.5pt
b) Déterminer l'écriture complexe de f, puis déduire son expression analytique. /0.75pt
c) Déterminer les éléments caractéristiques de f. /0.25pt
d) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par la similitude directe f /0.5pt

Exercice 2 : /03.25pts

Pour chacune des questions ci-dessous, trois réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est correcte. Le candidat indiquera, pour chaque numéro de question, la réponse correcte.

1) Une variable aléatoire X a pour univers-image $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De plus , la loi de probabilité de X a permis d'obtenir $p(5 < X) = \frac{1}{12}$; $p(X < 2) = 2p(X = 6) = 2p(X = 2)$; $p(X = 1) = p(X = 5)$ et $p(X \leq 3) = p(4 \geq X)$. L'espérance mathématique de X est :

Réponse 1 : $\frac{125}{36}$ Réponse 2 : $\frac{215}{36}$ Réponse 3 : $\frac{521}{36}$ /1.25pt

2) Soit (u_n) la suite réelle telle que $u_1 = e^2$, et pour $n \geq 1$, $e(u_{n+1})^2 = u_n$ .L'étude de la suite (u_n) pouvant se faire par utilisation d'une suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1+\ln(u_n)}{2}$.

On peut constater que la suite (u_n) converge vers :

Réponse 1 : e^{-1} Réponse 2 : e^{-2} Réponse 3 : $\sqrt{e}$ /01pt

4) L'étude de la croissance d'une plante à partir d'un instant considéré nous donne le tableau ci-dessous.

Diamètre (D en cm)	0,4	1,2	5,4	5,8
Temps (T en semaines)	0	2	6	8

On pose $U = \ln\left(\frac{8}{D} - 1\right)$. Par la méthode des moindres carrés, il vient que : /01.25pt

Réponse 1 : Le diamètre de cette plante atteindra 8 cm au bout de 10 semaines.
Réponse 2 : Au bout de 12 semaines, le diamètre de cette plante sera supérieur à 8 *cm*.
Réponse 3 : En fonction du temps T, le diamètre est $D(T) = \frac{8}{1+\alpha e^{-\beta T}}$ où $\alpha = 1{,}42$ et $\beta = -0{,}17$.

Exercice 3 **/04.5pts**

1) Soient a et b deux réels . Soit r un réel tel que $r^2 + ar + b = 0$ et soit (E) l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$. Soit f une solution de (E) . On pose $g(x) = e^{-rx}f(x)$

1.1) Calculer $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ en fonction de $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$ /0.75pt
1.2) Montrer que la fonction g est solution de l'équation différentielle $y'' + (2r + a)y' = 0$ (E') /0.5pt
1.3) Résoudre l'équation $u' + (2r + a)u = 0$, puis déduire les solutions de (E') /0.75pt
1.4) Déduire les solutions de (E) , Que signifie le cas $2r + a = 0$? /0.5pt

2) Un enseignant de Mathématiques joue avec ses élèves . Il a placé dans une urne 12 boules numérotées indiscernables au toucher parmi lesquelles une boule porte le numéro 1 , trois boules portent le numéro 2 , deux boules portent le numéro 3 et six boules portent le numéro 4 . L'élève DORCAS doit tirer au hasard et simultanément deux boules de cette urne . Les numéros portés par les deux boules tirées sont désignés par a et b tels que $a \geq b$. L'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est alors

formée . DORCAS reçoit 500 FCFA si les solutions de (E) sont de la forme $(\mathrm{Ax}+\mathrm{B})e^{rx}$; 300 FCFA si les solutions de (E) sont de la forme $Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$, mais doit remettre 200 FCFA à son enseignant si les solutions de (E) sont de la forme $(A\cos\beta x+B\sin\beta x)e^{\alpha x}$

2.1) Quelle est la probabilité pour que les solutions de (E) soient de la forme $(\mathrm{Ax}+\mathrm{B})e^{rx}$ /0.75pt

2.2) On désigne par X la variable aléatoire qui , à chaque tirage effectué par DORCAS , associe son gain algébrique .

a) Donner la loi de probabilité de X /0.75pt

b) Ce jeu est-il profitable pour DORCAS /0.5pt

Exercice 4 : **/04.25pts**

1) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{1+\ln x}{x^2}-1$.

a) Etudier le sens de variations de g, puis dresser son tableau de variations. /0.75pt

b) Calculer $g(1)$, puis montrer que l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions dont une , que l'on nommera α , est telle que : $\frac{2}{5}<\alpha<\frac{3}{5}$. /0.5pt

c) Déduire de ce qui précède, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$. /0.25pt

2) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(\ln x)^2+2\ln x-x^2$; et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O; I; J) d'unité graphique 5 cm.

a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. /0.5pt

b) Justifier que : $f'(x)=2xg(x)$, puis déduire de 1.c le tableau de variations de f. /0.75pt

4) Construire dans un même repère la courbe (C). On prendra $f(\alpha)\approx-1{,}2$ /0.5pt

5) On pose $h(x)=x\ln x-x$ et $I=\int_1^e(\ln x)^2dx$

a) Calculer $h'(x)$, puis déduire le réel $K=\int_1^e\ln x\,dx$ /0.5pt

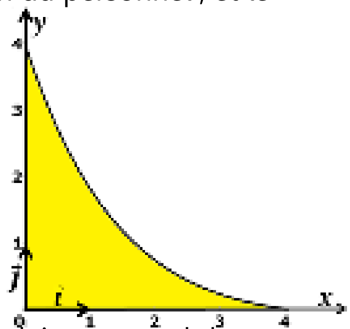
b) A l'aide de la technique d'intégration par parties, calculer I . /0.5pt

c) Déduire l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=e$ et $x=1$. /0.5pt

Partie II : Evaluation des compétences **/04.5pts**

A peine sorti de l'EGEM (Ecole des mines) en tant que Ingénieur en recherche minière , M. SOULEY a décidé de se prendre en charge grâce à une grosse récompense donnée par une ONG de la place . Il a loué , dans la région de l'Est , un site dans lequel il a rapidement pu découvrir 8 sites de gisement . Il doit rapidement réglé des problèmes financiers y afférant : La location du site , la gestion du personnel , et le désenclavement des différents gisements

La géographie du site est donnée ci-contre .



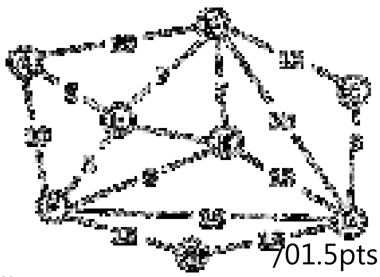
Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ dont l'unité est 200 m , Le site est délimité par la courbe d'une fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=4$. Cette fonction est une solution particulière de l'équation différentielle $4y''-4y'+y=0$ dont la courbe intégrale passe par le point A(0 ; 4) et admet son maximum au point d'abscisse 6 .La location du site est de 1000 $FCFA$ le m^2

Suivant la législation du travail dans ce milieu , les travailleurs sont payés en fonction de leur ancienneté . Le tableau statistique ci-dessous indique le mode de paiement des travailleurs dans lequel x_i désigne l'ancienneté (en années) et y_i le salaire mensuel du travailleur (en milliers de FCFA) . M. SOULEY veut recruter 80 travailleurs ayant une ancienneté de 3 ans , mais découvre qu'une tache d'huile est tombée sur cette fiche et a rendu illisible sa case à utiliser

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	10	25	41	k	69	80	86

Il obtient néanmoins la certitude que la droite de régression de x en y , par la méthode des moindres carrés est $x=0{,}075y-0{,}9$

M. SOULEY prévoit creuser des pistes liant les différents gisements .



La carte routière prévue est donnée par le graphe pondéré par les distances (en centaines de mètres) ci-contre sur lequel les sommets représentent les différents gisements . L'entretien des pistes est estimé à 100 FCFA le mètre . M. SOULEY cherche à minimiser sa dépense

Tâches :

1) Déterminer la somme que M. SOULEY doit prévoir pour la location du site /01.5pts
2) Déterminer la somme que M. SOULEY doit prévoir pour le salaire des travailleurs /01.5pts
3) Déterminer la somme que M. SOULEY doit prévoir pour désenclaver les sites de gisement /01.5pts