MINESEC	**Classe: T^{le} C**	**Année Scolaire: 2022-2023**
Collège: IBAY	**Coef: 7**	**Épreuve de Mathématiques**
Dépt. de Mathématiques	**Durée: 4 heures**	**Examen Blanc N$^{\underline{0}}$ 3**
		Examinateur: *Fotsing Soh P.*

Partie A: Évaluation des Ressources (15,5 points)

Exercice 1: (3,25 points)

1.) Démontrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$. $(0,5pt)$

2.) Démontrer par récurrence que $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$ est divisible par 111. $(0,5pt)$

3.) Soit (u_n) la suite définie par $U_n = \exp(1 - \frac{n}{2}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. On pose $V_n = \ln U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3.a) Montrer que (U_n) est géométrique et préciser le premier terme. $(0,5pt)$

3.b) Montrer que (V_n) est arithmétique et préciser le premier terme. $(0,5pt)$

4.) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ et $T_n = U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_n$.

4.a) Exprimer S_n et P_n en fonction de n, puis déterminer leurs limites. $(1,25pt)$

Exercice 2: (6,25 points)

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = \frac{2}{1+e^{2x}}$.

1.) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + 2y = 0$. $(0,25pt)$

2.) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-2x}k(x)$ où k est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2.a) Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si $k'(x) = \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$. $(0,5pt)$

2.b) Déduis-en la solution de (E) qui prend la valeur $\ln 2$ en 0. $(0,5pt)$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}\ln(1+e^{2x})$ et (C) sa courbe représentative.

3.) On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \ln(1+e^{2x}) - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

3.a) Étudier les variations de u, puis déduis-en le signe de $u(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. $(0,75pt)$

3.b) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0. $(0,5pt)$

3.c) Étudier les variations de la fonction f, puis tracer la courbe (C) et la tangente (T). $(1,25pt)$

4.) On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x)$ et (Γ) l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient $\begin{cases} x \in]1;3[; \quad y \in \mathbb{R} \\ x = \frac{2\ln(1+e^{2y})}{e^{1+y}} + 1 \end{cases}$

4.a) Démontrer que h est une bijection. $(0,25pt)$

4.b) Démontrer que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{y+1}{2} = h^{-1}(\frac{x-1}{2})$ où h^{-1} désigne la bijection réciproque. $(0,75pt)$

5.) Justifier que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}[-f'(x) + \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}]$, puis déduis-en une primitive de f sur $\mathbb{R}$. $(0,75pt)$

6.) Calculer l'aire $A(\alpha)$ du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$ $(\alpha > 0)$. $(0,5pt)$

7.) Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$. $(0,25pt)$

Exercice 3: (3 points)

1.) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit le plan (P) d'équation $x + y + z - 3 = 0$ et la droite (D) passant par $A(1,2,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

1.a) Démontrer que (D) et (P) sont perpendiculaires. $(0,25pt)$

1.b) Donner une représentation paramétrique de (D). $(0,25pt)$

1.c) Déterminer les coordonnées du point H intersection de (D) et (P). $(0,5pt)$

2.) On désigne par (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\frac{MA}{MH} = \sqrt{5}$.

2.a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S). $(0,5pt)$

2.b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques l'intersection de (S) et (P). $(0,5pt)$

3.) Soit φ défini par $\varphi(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$; $\varphi(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{k}$; $\varphi(\vec{k}) = \vec{j} + 2\vec{k}$.

3.a) Déterminer la matrice M de l'endomorphisme φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $(0,25pt)$

3.b) Déterminer $\varphi^{-1}(\vec{i})$; $\varphi^{-1}(\vec{j})$; $\varphi^{-1}(\vec{k})$.et en déduire la matrice de φ^{-1}. $(0,75pt)$

Exercice 4: (3 points)

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par r l'application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(z-1)$.

1.) Démontrer que r est une rotation dont on précisera l'angle et le centre. $(0,75pt)$

2.) A tout nombre complexe z différent de 3, on associe le nombre complexe $Z = \frac{z^2}{z-3}$. On note Γ l'ensemble des points M du plan d'affixe z, telle que Z soit un réel.

2.a) Démontrer que Γ est une droite (D) ou une hyperbole H. $(0,75pt)$

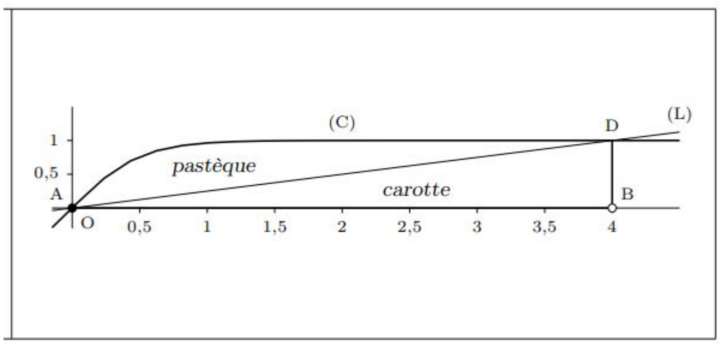
2.b) Déterminer le centre Ω, les foyers, les directrices et l'excentricité. $(0,75pt)$

2.c) Tracer H dans le repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$. $(0,5pt)$

3.) Démontrer que l'image H' de H par r est une conique et préciser sa nature. $(0,25pt)$

Partie B: Évaluation des Compétences (4,5 points)

La figure ci-après représente le domaine d'un villageois nommé ABBA. Il a cultivé cette année des carottes et des pastèques dans des portions comme l'indique la figure ci-contre. Il a récolté le même jour et à tout déversé dans un camion. Son fils KAM met en sac afin de vendre à raison de 6 800 XAF le sac de pastèques et à 3 000 XAF le sac de carottes, pou un total de 17 sacs.



A la fin de la vente, ABBA appelle KAM au téléphone pour savoir la recette obtenue. Avec des problèmes de réseau, il le suit à peine et ne retient que : ≪ la différence entre le prix de vente total des carottes et des pastèques n'est que de 4 000 XAF ≫. Un sac de chaque type n'est pas vendu. ABBA envisage vendre une partie ou tout son vaste terrain à l'avenir. Dans cette zone, le m^2 coûte 2 000 XAF. Il confie ce projet à M. KONG pour l'estimation de la valeur de ce terrain. Celui-ci crée un repère indiqué sur la figure ci-dessus où l'unité sur l'axe des ordonnées est 10 m et 100 m sur l'axe des abscisses. Les contours du terrain sont constitués de la droite (AB), la droite (DB) et la ligne (C). La droite (L) représente la séparation de la portion exploitée pour cultiver les pastèques de celle exploitée pour cultiver les carottes. KONG a réussi à trouver les équations de (C) et de (L) qui sont respectivement $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ et $y = \frac{1}{4}x$.

Taches:

1.) Combien coûtera ce terrain entier que ABBA souhaite vendre? $(1,5pt)$

2.) Combien aura ABBA s'il ne souhaite vendre que la portion réservée aux pastèques? $(1,5pt)$

3.) Aider ABBA à retrouver le nombre de sacs de chaque type des deux produits cultivés. $(1,5pt)$