

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 : 6points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.

Soient A et B deux points d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}$. C est le point du plan tel que OACB est un losange.

I. On considère la similitude directe s de centre O qui transforme A en C.

- 1) Déterminer l'angle et le rapport de s . 0.5pt
- 2) Montrer que l'image de la droite (OC) par s est la droite (OB) 0.5pt

II. Soit φ la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\bar{z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- 1) Montrer que φ est une isométrie du plan 0.75pt
- 2) On considère la transformation r qui à tout point M_1 d'affixe z_1 , associe le point M'_1 d'affixe z'_1 telle que : $z'_1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z_1 + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer la nature de r et donner ses éléments caractéristiques. 0.5 pt

- 3) a) Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB})$. 0.5pt
 b) Soit $S_{(AO)}$ la symétrie orthogonale d'axe (AO). Déterminer la droite (Δ) telle que : $r = S_{(\Delta)} \circ S_{(AO)}$. 0.5 pt
 c) Déterminer l'écriture complexe de $S_{(AO)}$. 0.25 pt
- 4) Montrer que $\varphi = r \circ S_{(AO)}$ et en déduire la nature de φ 0.75pt

III. On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$g: \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto (1 + ia)z + (1 - ia)\bar{z} \end{cases}$$

1. Montrer que g est linéaire. 0.5pt
2. On considère dans la suite $a = 1$:
 a) Déterminer le kerg 0.75pt
 b) Déterminer le img 0.5pt

EXERCICE 2 : 4points

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- a) Montrer que les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles. 0.5pt
- b) Donner un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) intersection des plans (P) et (Q). 0.5pt
- c) On considère le cône de révolution (Γ) d'axe (Ox) contenant la droite (Δ) comme génératrice. Montrer que les coordonnées (x, y, z) de tout point M de la génératrice (Δ) vérifient l'équation : $y^2 + z^2 = 7x^2$. 0.25pt

2. On suppose que (Γ) a pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$. Soit a un nombre réel, (P') le plan d'équation : $x = a$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\Gamma) \cap (P')$. 0.75pt

3. a) Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3[7]$, dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution. 0.5pt
 b) Montrer la propriété suivante : pour tous entiers relatifs a et b , si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b . 1pt
4. Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante : si le point A de coordonnées $(a; b; c)$ est un point de cône (Γ) alors a, b et c sont divisibles par 7. 0.5pt

PROBLEME (10 points)

Les parties A et B du problème sont indépendantes

Partie A : 5.5pts

Soit un nombre réel $a > 0$.

On se propose de résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $(E_a) : a^x = x^a$. Pour cela, on considère la fonction f_a telle que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_a(x) = a^x x^{-a}$.

- 1) Justifier que : pour tout $x \in]0, +\infty[$, $a^x = x^a \Leftrightarrow f_a(x) = 1$. 0.25 pt
- 2) On suppose que $a = e$
 - a- Dresser son tableau de variation 1pt
 - b-) En déduire que : pour tout $x \in]1, +\infty[$, $\frac{x}{\ln x} \geq e$ 0.5pt
- 3) On suppose que : $0 < a < 1$.
 - a-) Dresser le tableau de variation de f_a . 1pt
 - b-) Montrer que l'équation (E_a) admet une unique solution que l'on déterminera. 0.5pt
- 4) On suppose que $a > 1$ et $a \neq e$
 - a-) Dresser le tableau de variation de f_a . 1pt
 - b-) Déduire des questions 2-b) et 4-a) que la fonction admet minimum absolu strictement inférieur à 1. 0.75pt
- 5) En déduire que l'équation (E_a) admet exactement deux solutions x_1, x_2 tel que : 0.5pt
 $x_1 < \frac{a}{\ln a} < x_2$.

Partie B (4.5points)

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$

- 1) a) Démontrer que $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$ 0,5pt
 b) Etudier la convergence de (U_n) 0.5pt
 c) Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$ 0.5pt
 d) Montrer que $U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$ 0.5pt
 e) Déduire la valeur de U_1 0.5pt
- 2) Pour tout x de $[0; 1]$ et pour tout $n \geq 2$, on pose : $S_n(x) = 1 - x + \dots + (-1)^n x^n$
 - a) Démontrer que : $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$ 0.5pt
 - b) Prouver que : $1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$ 0.5pt
 - c) Justifier que : $U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{1+n} \right) \right]$ 0.5pt
 - d) En déduire la valeur exacte de $\int_0^1 x^2 \ln(1+x) dx$ 0.5pt