



EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'épreuve comporte 03 exercices et 01 problème tous obligatoires. Elle est répartie sur 02 pages.

Exercice 1 : 03.25 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique : 1cm).

1. On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$, $-1 + 4i$ et $5 + 2i$.

On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$, la symétrie S d'axe (AB) et la transformation $f = t \circ S$. On désigne par A' et B' les images respectives de A et B par t .

Calculer les affixes de A' et B' et placer les points A, B, C, A' et B' sur une figure. **0.75pt**

2. On rappelle que l'écriture complexe d'un antidéplacement est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ où a et b sont deux nombres complexes et $|a| = 1$. A tout point M d'affixe z , f associe le point M' d'affixe z' .

Justifier que f est un antidéplacement et démontrer que $z' = \frac{-3-4i}{5}\bar{z} + \frac{38-6i}{5}$. **0.75pt**

3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f . La transformation f est-elle une symétrie ? **0.75pt**

4. On appelle D le point d'affixe $3+6i$, (Δ) la médiatrice de [BD] et S' la symétrie d'axe (Δ) .

a) Montrer que les (Δ) et (AB) sont parallèles. Déterminer $S \circ S'$. **0.5pt**

b) Montrer que $f \circ S'$ est une translation t' , de vecteur à déterminer. En déduire que $f = t' \circ S'$. **0.5pt**

Exercice 2 : 03.25 points

Soit E un espace vectoriel rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{n}$ de E tels que $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. A tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in E$, on associe l'application f définie de E dans E par : $f(\vec{u}) = (\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{n}$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de E. **0.5pt**

2. Montrer que $f(\vec{u}) = (-y - z)\vec{i} + (x + 2y + z)\vec{j} + (-x - y)\vec{k}$. **0.5pt**

3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. **0.5pt**

4. a) Montrer que $f \circ f = f$ et en déduire la nature de f . **0.5pt**

b) Déterminer les éléments caractéristiques de f . **0.75pt**

c) Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires. **0.5pt**

Exercice 3 : 03.75 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit S la transformation du plan qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = 5iz + 4 + 6i$.

- A. 1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S . **0.75pt**

2. On pose : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Montrer que : $\begin{cases} x' = -5y + 4 \\ y' = 5x + 6 \end{cases}$. **0.5pt**

- B. On désigne par Π l'ensemble des points $M(x, y)$ où x et y sont des entiers relatifs tels que $-3 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq 5$.

1. a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $4a + 3b = 5$. **0.5pt**

- b) En déduire l'ensemble des points M de Π tels que $-3x' + 4y' = 37$. 0.75pt
2. Soit M un point de Π et M' son image par S .
- a) Démontrer que $x' + y'$ est un multiple de 5. 0.25pt
- b) Démontrer que $x' - y'$ et $x' + y'$ ont la même parité. 0.5pt
- c) Déterminer l'ensemble des points M de Π tel que $x'^2 - y'^2 = 20$. 0.5pt

PROBLEME : 10 points

Les parties A, B et C sont liées.

Partie A : 02.25 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. 0.5pt
2. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. 0.5pt
3. Etudier la branche infinie de f en $-\infty$. 0.5pt
4. Tracer Γ . (unité : 4cm sur les axes) 0.75pt

Partie B : 03.5 points

1. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0 ; 1]$. 0.75pt
2. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. 0.5pt
3. Soit (U_n) la suite numérique définie pour tout n par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
 - a) Démontrer que $U_n \in [0 ; 1]$. 0.5pt
 - b) Démontrer que pour tout entier n , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$. 0.5pt
 - c) En déduire que pour tout entier n , $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |U_0 - \alpha|$. 0.5pt
 - d) Démontrer que la suite (U_n) converge. 0.5pt
 - e) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que U_{n_0} soit la valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C : 02.25 points

1. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $u(t) = \ln(1 + t) - t$ et $v(t) = \ln(1 + t) - t + \frac{1}{2}t^2$.
En étudiant les variations de u et v , donner le signe de u et v , et en déduire que $t - \frac{1}{2}t^2 \leq \ln(1 + t) \leq t$. (on ne demande pas la limite de u et v en $+\infty$). 1pt
2. Soit n entier naturel ($n \geq 1$). On considère le nombre $S(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.
 - a) Démontrer que $\frac{1-e^{-n}}{e-1} - \frac{1}{2} \frac{1-e^{-2n}}{e^2-1} \leq S(n) \leq \frac{1-e^{-n}}{e-1}$. 0.75pt
 - b) On admet que la suite $S(n)$ a une limite réelle L . montrer que $\left| L - \frac{1}{e-1} \right| \leq \frac{1}{2(e^2-1)}$. 0.5pt

Partie D : 02 points

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . f est l'application affine du plan qui à tout point $M(x, y)$, associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = 2x \end{cases}$.

1. Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par f . 0.5pt
2. Donner l'expression analytique de la projection orthogonale P sur (D) . 0.75pt
3. Soit H l'image de M par la projection P . Exprimer $\overrightarrow{HM'}$ en fonction de $\overrightarrow{HM}$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f . 0.75pt