MINESEC	Thèmes	Mars 2016
CITY BILINGUAL ACADEMY	Arith.Suit.Coniq.	**Classe :** $T^{le}C$
Inspection de pédagogie/scienes	complx.isom.	**Séquence n°4**
examinateur :Ulrich TCHEUKO	Fonct.esp vect	**Durée :04h00 Coef :5**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE I **3 pts** *Arithmetique+suites*

On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{7}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + 1 & n\epsilon\mathbb{N} \\ y_{n+1} = \dfrac{20}{3}x_n + \dfrac{8}{3}y_n + 5 & n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}.$$

1. Montrer par récurrence, que les points M_n sont sur une droite (Δ) dont une équation est : $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$. **0,75pt**
2. Montrer par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels. **0,75pt**
3. Montrer que :
   a. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3. **0,25pt**
   b. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux**0,5pt**
4. a. Montrer, par récurrence, que $x_n = \dfrac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$. **0,5pt**
   b. En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, **0,25pt**

EXERCICE II **3 pts** *complexes+coniques*

Soit u un nombre complexe et (E_u) l'équation :$z^2 - (2u - i\overline{u})z - 2iu\overline{u} = 0$

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E_u).
   On désignera par z' et z'' les solutions de cette équation. **0,75pt**
2. On désigne par A, M, M' et M'' les points d'affixes respectives $2i$, u, z' et z''.
   Soit (Γ) l'ensemble des points M tels que les points A, M' et M'' soient alignés.
   a. Trouver une équation cartésienne de (Γ). **0,75pt**
   b. Montrer que (Γ) est une hyperbole dont on précisera les éléments. **0,75pt**
   c. Donner une équation cartésienne de la tangente à (Γ) en O. **0,25pt**
   d. tracer (Γ). **0,5pt**

EXERCICE III **3,5 pts** *Isométries*

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête $a > 0$ tel que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthogonal direct de l'espace. La droite (BH) est sécante au plan (AFC) en W.

1. a. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{FB} \wedge \overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{FC}$. **0,25pt**
   En déduire que : $\overrightarrow{FA} \wedge \overrightarrow{FC} = -a\overrightarrow{BH}$ **0,25pt**
   b. Démontrer que la droite (BH) est orthogonale au plan (AFC). **0,5pt**

2. On suppose $a = 1$ et on pose $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{AE}$. Le repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est alors orthonormé direct de l'espace.

   a. Déterminer dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{FA} \wedge \overrightarrow{FC}$ puis vérifier que $\overrightarrow{FA} \wedge \overrightarrow{FC} = -\overrightarrow{BH}$ **0,75pt**

   b.Déterminer les coordonnées du point W ainsi qu'une équation cartésienne du plan (AFC). **0,5pt**

3. On désigne par $S_{(BH)}$ le demi-tour d'axe (BH) et par $S_{(AFC)}$ la réflexion de plan (AFC).

   a. Donner la formule analytique dans le repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $S_{(AFC)}$. **0,5pt**

   b. Donner la nature de $f = S_{(BH)} \circ S_{(AFC)}$ **0,25pt**

   c. Donner la formule analytique de f dans le repère précédent. **0,25pt**

   d. Déterminer les points $f(A)$ et $f(C)$. **0,5pt**

$\boxed{\textbf{PROBLÈME}}$ **10 pts** *fonctions*

Partie A :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + |x| + x^2}}$

1. Vérifier que f est une fonction paire. **0,25pt**
2. Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et étudier le signe de $f(x)$ pour tout $x \epsilon [0\ ;\ +\infty[$ **1pt**

Partie B :

On considère la fonction numérique $F : x \longmapsto \int_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{1 + |x| + x^2}}$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan et (D) la droite d'équation $y = x$.

1. a. Justifier que F est définie et derivable sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**

   b. Démontrer que F est une fonction impaire. **0,25pt**

2. a. Démontrer que pour tout nombre réel positif t, $f(t) \geq \dfrac{1}{1+t}$. **0,5pt**

   En déduire que pour tout nombre réel positif x , $F(x) \geq ln(1 + x)$. **0,25pt**

   b. Déterminer la limite de F en $+\infty$. **0,25pt**

3. Calculer $F'(x)$, pour $x \epsilon [0\ ;\ +\infty[$ et dresser le tableau de variation de F **1pt**

4. a. Démontrer que pour tout nombre réel positif t, $f(t) \leq 1$. **0,5pt**

   En déduire que pour tout nombre réel positif x , $F(x) \leq x$. **0,25pt**

   b. Donner une interprétation graphique de ce résultat. **0,25pt**

5. a. Démontrer que pour tout nombre réel t de $[1\ ;\ +\infty[$, $f(t) \leq \dfrac{1}{t}$. **0,5pt**

   b. Déduire pour tout nombre réel $x \epsilon [1\ ;\ +\infty[$, $F(x) \leq \int_0^1 f(t)dt + lnx$. **0,5pt**

6. a. Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique. **0,25pt**

   b. Tracer (D) et donner l'allure générale de $(\mathcal{C})$. **1pt**

Partie C :

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et $B = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E.
On désigne par f et g les applications linéaires définies par :
$f(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j} \qquad f(\vec{j}) = \vec{j} \qquad g(\vec{i}) = \vec{i} \qquad g(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$.

1. Démontrer que f et g sont des isomorphismes de E sur E. **1pt**
2. Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$. **0,5pt**
3. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E pour lesquels $f \circ g(\vec{u}) = g \circ f(\vec{u})$.
   a. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel réel. **0,75pt**
   b. Déterminer une base de $\mathcal{F}$. **0,5pt**

"PRIÈRE ET TRAVAIL, TRAVAIL ET PRIÈRE"