Lundi

MINESEC

Collège Montesquieu

Année Scolaire 2022/2023
Période : 3
Classe : T C
Coef : 7 Durée : 4h
Examinateur : NOLABIA

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PARTIE A : Utilisation des ressources (15,5 points)

Exercice 1 : 4.75pts (Arithmétique-Nombres complexes)

I- 1. On appelle nombre parfait tout entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts (distinct de lui-même). Le nombre 28 est-il parfait ? 0,25pt

2. Détermine tous les couples d'entiers naturels $(a\,;b)$ tels que :

i) $ppcm(a\,;b) + pgcd(a\,;b) = a + 9$ ii) $2 \times 18^b = 3 \times 6^a$. 0,75 pt + 0,5 pt

3. Détermine les valeurs possibles de l'entier naturel a tel que $ppcm(a\,;\,6) = 72$. 0,5 pt

4) On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

On appelle nombre de CARMICHAEL tout entier naturel composé vérifiant le petit théorème de Fermat.

a) Décomposer 561 en produit de facteurs premiers. 0,25pt

b) Soit a un nombre entier premier avec 561. Montrer que $a^{560} \equiv 1[3]$, $a^{560} \equiv 1[11]$ et $a^{560} \equiv 1[17]$. 1,5pt

c) En déduire que 561 est un nombre de CARMICHAEL 0,5pt

II-On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$. 0,5 pt

Exercice 2 : 3.5pts (Espaces vectoriels)

On définit dans $\mathbb{R}^3$ les ensembles $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0 \; et \; z = 0\}$;
$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, -y + z = 0 \; et \; x = 0\}$ et $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 - y = 0\}$.

1. H est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? 0,25pt

2. Montre que F et G sont chacun une droite vectorielle dont on précisera une base. 1pt

3. La somme $F + G$ est-elle directe ? Peut-on dire que les sous espaces vectoriels F et G sont supplémentaires ? 0,5pt

4. Détermine $F + G$ puis donner sa dimension, une base et une équation. 1pt

5. On considère les vecteurs $u_1 = (0,1,1)$ et $u_2 = (1,10)$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Justifie qu'ils n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$. 0,25pt

b) Détermine u_3 pour que la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ soit une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. 0,5pt

Exercice 3 : 3.25pts (Applications linéaires et matrices)

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Soit f l'application de E dans E qui à tout vecteur $\vec{u}(x; y; z)$ de E associe le vecteur $f(\vec{u}) = (-x + 3y + 2z)\vec{i} + (-x + z)\vec{j} + (-x + 3y + 2z)\vec{k}$.

1.a) Montre que f est une application linéaire . 0,5 pt

b) Détermine le noyau $Ker\,f$ de f (on précisera une base de $Ker\,f$). 0,5 pt

c) Détermine l'image Imf de f (on précisera une base de Imf). 0,5 pt

d) f est-elle bijective ? Justifie ta réponse. 0,25 pt

e) A-t-on $Imf \oplus kerf = E$? 0,5 pt

2. Détermine la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{e_1}\,; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ où $\vec{e_1} = -\vec{i}$; $\vec{e_2} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e_3} = -\vec{i} + \vec{k}$ sont des vecteurs de E. 1 pt

Exercice 4: 4pts (Fonctions continues et strictement monotones-Etude de fonctions)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - sinx$.

1. Montre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. 0,5 pt
2. Dresse le tableau de variation de f et celui de sa fonction réciproque. 0,75 pt
3. Justifie que sa dérivée réciproque $(f^{-1})'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. 0,25 pt
4. Montre que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α dans $]2\,;2{,}4[$. 0,5 pt
5. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 + \frac{1}{2}sinx$. 0,5 pt

   a-Vérifie que $g(\alpha) = \alpha$. 0,5 pt

   b- Montre que pour tout nombre réel x, on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. 0,5 pt

   c- En déduire que pour tout nombre réel x, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$. 0,5 pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (4.5 points)

Etre capable de déployer un raisonnement logique et communiquer à l'aide du langage mathématique en faisant appel aux fonctions et à l'arithmétique pour évaluer ou faire des prévisions d'un budget.

La commune de Betare Oya et les neuf communautés villageoises qui la constituent perçoivent des taxes d'une entreprise qui exploite leur forêt communautaire. Ci-dessous sont donnés les détails sur le calcul et la gestion de ces taxes

- **Taxes perçues par les communautés villageoises**

Le montant global de cette taxe en millions de francs CFA à la n-ième année d'exploitation est $t(n) = 2^n - 1$. Pour éviter la surtaxation et les querelles entre les communautés, cette taxe n'est perçue lorsque $t(n)$ est divisible par 9. Toutes les communautés reçoivent alors le même montant et chaque communauté a l'obligation de réaliser au moins un projet.

- **Taxes perçues par la commune**

Pour ne pas susciter de convoitises, le montant de cette taxe est généralement donné dans la base 16 par la formule $c(x) = \overline{x7D7840}^{16}$ où x est l'unique solution de l'équation $2^x - 318x - 280 = 0$.

- **Impact sur la COVID 19**

En 2020, la crise sanitaire a affecté les activités de l'entreprise qui n'était qu'à sa sixième année d'exploitation. Ainsi, en dehors de la commune qui a perçu la somme prévue dans le contrat, chaque communauté a perçu un montant en FCFA estimé en base 16 à $\overline{2ABCDE}^{16}$.

- **Projet de la commune**

Avec la somme perçue, le maire envoi les ouvriers dans un site touristique aménagé un espace sur lequel sera construit un ouvrage d'art. les dimensions du site ne sont pas données mais dans le document qui leur est remis ils lisent ceci : « l'ouvrage sera réalisé sur un terrain de forme d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse et la base seront des entiers naturels ayant $3^2 5^2 \text{m}^2$ comme différence entre leur carré »

1. Quel est le nombre minimal de projets que pourra réaliser chaque communauté villageoise sachant que l'entreprise va exploiter la forêt pendant 30 ans ? *(1,5 pt)*

2. Déterminer en base 16 la somme que l'entreprise a donné globalement à la commune et aux neuf communautés villageoises en 2020. *(1,5 pt)*

3. Quel est le montant maximal que les ouvriers pourront gagner si la commune paie l'aménagement d'un m^2 du site à $12000\ FCFA$ *(1,5pt)*

"Tu détruiras ce que tu aimes ou ce que tu aimes te détruira"