CENTRE D'EDUCATION ET DE COACHING POUR UNE MENTALITE EMERGENTE EN VUE D'UN CAMEROUN EMERGENT
Tél : 675 95 7731 / 6 94 84 16 82

EDUCATION AND COACHING CENTER FOR AN EMERGING MENTALITY FOR AN EMERGING CAMEROON
Tel : 695 11 64 75

TRAVAUX DIRIGES DU MERCREDI 15-02-2023 **MATHEMATIQUES T^{LE}D** **DUREE 5H00**

EXERCICE 1 :

I. On considère le polynôme complexe P de degré 3 défini par :

$$P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i.$$

1. Montrer que $P(2i) = 0$.

2.a. Déterminer les nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$.

b. Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

3. Soient $z_A = 1 + i$ et $z_M = x + iy$ avec x et y des nombres réels.

Soit (C) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que : $|z_M - z_A| = 4$.

a. Montrer que le point $B(-3,1)$appartient à (C).

b. Déterminer, puis représenter l'ensemble(C).

II. Dans le plan complexe, on donne les points $A(2;-5)$, $B(2;3)$ et $C(8;-1)$.

1. Donner la forme algébrique de $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$.

2. En déduire la nature exacte du triangle ABC.

3. Donner la forme complexe de la rotation r de centre C qui transforme B en A.

4. Soit $(C_2) : x^2 + y^2 = 9$. Déterminer l'image de (C_2) par la rotation r.

EXERCICE 2 :

On dispose de deux dés cubiques d'apparences identiques : l'un est parfait et l'autre est truqué. Pour le dé truqué, la probabilité d'obtenir un six est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1°) a) On lance le dé parfait 3 fois de suite. On suppose les 3 lancers indépendants. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux six.

b) On lance le dé truqué 3 fois de suite. On suppose les 3 lancers indépendants. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux six.

2°) On choisit l'un des deux dés précédents au hasard (les deux dés ont donc la même probabilité d'être choisis) et on lance ce dé 3 fois de suite. On suppose les 3 lancers indépendants.

On désigne par T, l'événement : « choisir le dé truqué »,

Par $\overline{T}$, l'événement contraire de T,

Par A, l'événement : « choisir le dé parfait et obtenir exactement deux six »,

Par B, l'événement : « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux six »,

Par C l'événement : « obtenir exactement deux six ».

On pourra admettre que la réponse au 1.a. est $\frac{5}{72}$ et que la réponse au 1.b. est $\frac{2}{9}$.

a) Calculer la probabilité de l'événement A puis celle de l'événement B.

b) En déduire la probabilité de l'événement C.

c) Déterminer la probabilité d'avoir choisi le dé truqué, sachant qu'on a obtenu exactement deux six.

EXERCICE 3 :

Un fumeur essaye de réduire sa consommation. On admet qu'il fonctionne toujours suivant les conditions :

C_1 : S'il reste un jour sans fumer, alors il fume le lendemain avec probabilité de 0,4.

C_2 : Par contre, s'il cède et fume un jour, alors la probabilité qu'il fume le lendemain est de 0,2.

On note U_n la probabilité qu'il fume le n^{ème} jour.

1°) Montrer que pour tout n de N* : $U_{n+1} = -0{,}2U_n + 0{,}4$

2°) Soit pour tout n de N* : $V_n = U_n - \frac{1}{3}$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

3°) En déduire U_n en fonction de n et U_1

4°) Calculer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

EXERCICE 4 :

Anne et Solange sont deux amies qui se rendent dans un supermarché pour acheter uniquement des oranges, ananas et avocats. Anne achète une orange à 200 FCFA, un ananas à 350 FCFA, un avocat à 600 FCFA et paie la somme de 23250 FCFA.

Solange achète une orange à 300 FCFA, un ananas à 500 FCFA, un avocat à 800 FCFA et paie la somme de 32500 FCFA. Elles achètent en tout 60 fruits.

1. On désigne respectivement par x, y et z le nombre d'oranges, d'ananas et d'avocats achetés par les deux amies.

a. Justifier que les nombres x, y et z vérifient le système (S) ci-dessous :

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 2x + 3{,}5y + 6z = 232{,}5. \\ 3x + 5y + 8z = 325 \end{cases}$$

b. Résoudre le système (S).

2. En déduire le nombre d'oranges, le nombre d'ananas et le nombre d'avocats achetés par les deux amies.

EXERCICE 5

I- On considère la fonction définir sur $]0; +\infty[$ *par* $f(x) = x + \ln x$.

(a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$

(b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ *admet une unique solution notée α tel que* $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 2\,1$

II- On considère la fonction g définir sur $]0;+\infty[$ *par* $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5}$ *et* (Cf) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* (O, I, J).

(a) Calculer les limites de g au bornes de son ensemble de définition.

(b) Étudier les branches infinies à (Cf)

(c) Étudier le sens de variation de la fonction g sur $]0;+\infty[$.

(d) En déduire que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$; $\frac{2}{5} \leq g'(x) \leq \frac{3}{5}$ *et que* $|g'(x)| \leq \frac{3}{5}$ *dans cet intervalle.*

(e) Construire (Cf)

(f) Démontrer qu'un nombre réel x > 0 est solution de l'équation $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$.

III- On considère la suite (u_n) *définir par* $u_0 = \frac{1}{2}$ *et pour tout entier naturel n, par* $u_{n+1} = g(u_n)$.

(a) En utilisant le sens de variation de la fonction g , démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq |u_n - \alpha|$.

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$ *et en déduire que la suite* (u_n) *converge vers α.*

(d) Déterminer une valeur approchée de α à 5×10^{-4} *près*