Sujets Baccalauréat Malien

T.SEXP

Conseils pratiques pour l'épreuve de mathématiques au baccalauréat

Le texte de l'épreuve de mathématiques comporte deux exercices et un problème à rédiger en **3 heures**. Le nombre de points attribués aux exercices et au problème est toujours précisé dans l'énoncé.
Un exercice en **4 ou en 5 points** devra être rédigé et relu en **40 min**, un problème en **12 points** en environ **2h20 minutes**.

Au début de l'épreuve

- Lisez lentement **tout l'énoncé, c'est-à-dire du début à la fin**. En effet, les questions sont rarement indépendantes et il peut arriver que l'une d'entre elles donne une indication précieuse quant à la résolution des questions précédentes.
- Détermine le temps maximum que vous devez employer pour traiter, rédiger et relire chaque exercice et le problème en fonction des indications du barème.
- Commencez par l'exercice qui vous parait ≪ **le plus facile** ≫et même si possible par **le problème.**

Pendant l'épreuve

- Cherchez d'abord les questions au brouillon, si vous terminez l'exercice, recopiez-le ; si vous n'arrivez pas à Résous une question, relisez une fois votre brouillon, si tout vous parait juste, commencez la rédaction ; ≪ **la mise au propre** ≫en faisant ressortir les résultats obtenus dans les premières questions car ceci vous aidera à Trouve la suite.
- Si vous n'arrivez pas à Démontre un résultat donné dans l'énoncé, laissez un **blanc** dans votre copie c'est-à-dire **un espace** en fonction de la densité de la question, et continuez votre exercice ou votre problème.
- N'oubliez pas qu'une réponse doit être justifiée.

Présentation de votre copie

- Séparez les questions, encadrez ou soulignez les résultats ; respectez les notations du texte car ceci peux inciter le correcteur à une **indulgence** vis-à-vis de votre copie.
- N'abusez pas **des effaceurs et des correcteurs**, la copie devient parfois illisible.
- N'oubliez pas que **les figures géométriques et les graphiques** doivent comporter tous les points nécessaires à la compréhension de vos démonstrations.

Bonne chance à tous et à toutes !!!

Bac. Session de Juin 1990

Exercice 1……………………………………………………(5 *points*)

Une cible comprend deux parties désignées par 1 et 2. Un tireur lance une flechette sur une cible. Il atteint la partie 2 avec la probabilité $\frac{1}{6}$ et marque alors deux points.

Il atteint la partie 1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et marque alors un point.

1) Quelle est la probabilité pour que le tireur manque la cible ? Il ne manque aucun point.
2) Le tireur lance sa flechette deux fois. Les deux lancers sont indépendants.
Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des points obtenus.
Détermine la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.
3) Représente graphiquement la fonction de répartition de X.

Exercice 2……………………………………………………(5 *points*)

On considère la suite $u_n (n \geq 1)$ des nombres réels définie par $u_0 = 1$ et $5u_n = 2u_{n-1} - 3$.

1) Calcule u_1 et u_2.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n + 1$. Montre que la suite (v_n) est une suite géométrique.
3) Calcule v_n puis u_n en fonction de n.
4) Quelle est la limite de u_n en $+\infty$?
5) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Calcule S_n
6) Quelle est la limite de S_n en $+\infty$?

Problème……………………………………………………(10 *points*)

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R} - \{-2\}$, on pose : $U(x) = \frac{3x-6}{x+2}$.

1) a- Résous dans $\mathbb{R} - \{-2\}$ l'équation $U(x) = -1$.
b- Résous dans $\mathbb{R} - \{-2\}$ l'équation $U(x) = 1$.
c- Etudie le signe de $U(x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R} - \{-2\}$.
2) a- Etudie les variations de la fonction f définie par : $f(x) = ln\left(\frac{3x-6}{x+2}\right)$
b- Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé, Trace la courbe représentative (C) de la fonction f.
3) Soit la fonction g définie par : $g(x) = ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|$
a- Ecris l'expression de $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
b- Etudie les variations de la fonction g.
c- Trace la courbe représentative (Γ) de la fonction g dans un repère orthonormé.
d- Montre que (Γ)admet pour centre de symétrie le point $\omega(0\,; ln3)$
4) Soit h l'application de $]-2\,;\,2[$ dans $\mathbb{R}$ telle que: $h(x) = ln\left(\frac{-3x+6}{x+2}\right)$
Montre que h est une bijection de $]-2\,;\,2[$ sur $\mathbb{R}$ puis Détermine l'application réciproque h^{-1} de h.

Correction Bac 1990

Exercice 1……………………………………………………..……($\boldsymbol{5\ points}$)

1) Déterminons la probabilité pour que le tireur manque la cible.

- La probabilité pour atteindre la partie 1 de la cible est : $\frac{1}{3}$
- La probabilité pour atteindre la partie 2 de la cible est : $\frac{1}{6}$

Soit $P(A)$ la probabilité pour que le tireur manque la cible.

$P(A) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = 1 - \left(\frac{3}{6}\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

X	0	1	2
$P(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

2) Détermine la loi de probabilité de X

Le tireur lance sa flèche deux fois. Les deux lanceurs étant indépendants, la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des points obtenus est donnée par : X= $\{0\ ; 1; 2\}$

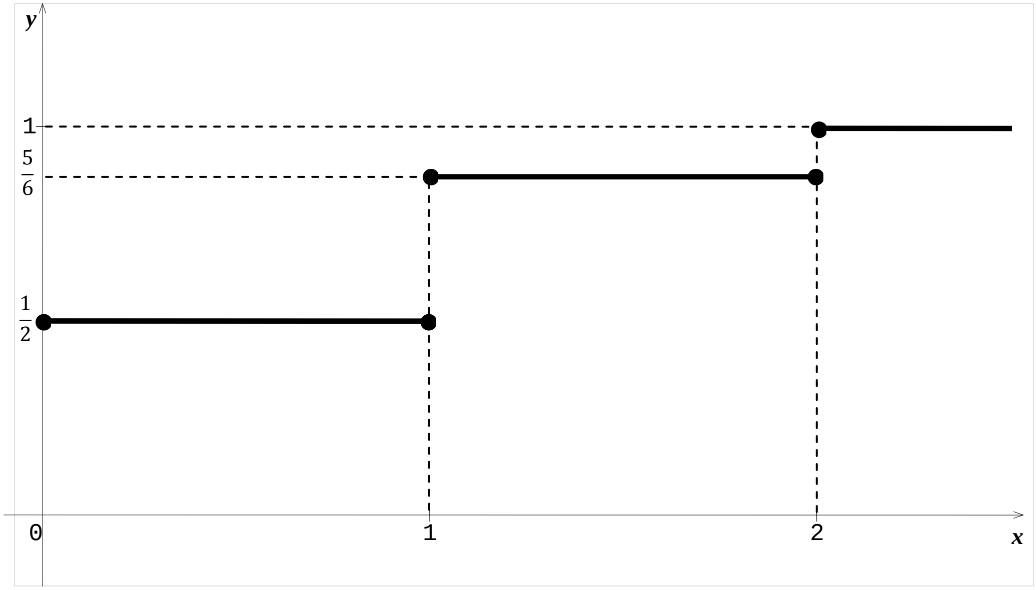
Ainsi la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

Son espérance mathématique est : $E(\mathrm{X}) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

Sa variance est : $V(\mathrm{X}) = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

3) Représentons graphiquement la fonction de répartition de X.

- Pour $x \leq 0$, on a : $F(\mathrm{X}) = 0$
- Pour $0 < x \leq 1$, on a : $F(\mathrm{X}) = \frac{1}{2}$
- Pour $x > 2$, on a : $F(\mathrm{X}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$



Exercice 2……………….……………………………………….(5 *points*)

On considère la suite $u_n (n \geq 1)$ des nombres réels définie par $u_0 = 1$ et $5u_n = 2u_{n-1} - 3$.

1) Calculons u_1 et u_2.

$5u_n = 2u_{n-1} - 3 \Rightarrow u_n = \frac{2u_{n-1}-3}{5}$

- pour $n = 1$, on a : $u_1 = \frac{2u_0-3}{5} = \frac{2(1)-3}{5} = \frac{2-3}{5} = -\frac{1}{5}$
- pour $n = 2$, on a : $u_2 = \frac{2u_1-3}{5} = \frac{2\left(-\frac{1}{5}\right)-3}{5} = \frac{-\frac{2}{5} - 3}{5} = -\frac{17}{25}$

2) Soit $v_n = u_n + 1$. Montrons que la suite (v_n) est une suite géométrique.

v_n Est une suite géométrique si et seulement si : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$ ou $v_{n+1} = qv_n$

$v_n = u_n + 1 \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 1$. Or $u_{n+1} = \frac{2u_n-3}{5}$

$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{2u_n-3}{5} + 1 = \frac{2u_n-3+5}{5} = \frac{2u_n+2}{5} = \frac{2(u_n+1)}{5} = \frac{2}{5}(u_n + 1) = \frac{2}{5}v_n$

D'où v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et de premier terme :
$v_0 = u_0 + 1 = 1 + 1 = 2$

3) Calculons v_n puis u_n en fonction de n.
v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = 2$.
Alors son expression est donnée par $v_n = v_0 \times (q)^n$
$\Rightarrow v_n = 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$
D'autre part $v_n = u_n + 1 \Rightarrow u_n = v_n - 1$. Or $v_n = 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$
$\Rightarrow u_n = 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1$

4) Déterminons la limite de u_n en $+\infty$?
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1$. Puisque $\frac{2}{5} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1 = 0 - 1 = -1$.

5) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Calculons S_n

S_n Désigne la somme des n premiers terme de la suite u_n

On sait que :

$u_n = v_n - 1$
$u_0 = v_0 - 1$
$u_1 = v_1 - 1$
.
.
.
$u_n = v_n - 1$

$S_n = S_n' - (1 + 1 \ldots\ldots +1)$.

Où $S_n' = \frac{2\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]}{\frac{3}{5}} = \frac{10\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]}{3} = \frac{10}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$ désigne la somme des n premiers terme de la suite géométrique v_n

$$=> S_n = \frac{10}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right] - \underbrace{(1 + 1 \ldots\ldots +1)}_{(\boldsymbol{n+1})\boldsymbol{fois}}$$

$$=> S_n = \frac{10}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right] - (n + 1)$$

6) Déterminons la limite de S_n en $+\infty$?

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{10}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right] - (n + 1).$$

Puisque $\frac{2}{5} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n + 1) = +\infty$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\infty$

<u>Problème</u>……………………………..………..…………………….($\boldsymbol{10\ points}$)

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R} - \{-2\}$, on pose : $U(x) = \frac{3x - 6}{x + 2}$.

1) a- Résolvons dans $\mathbb{R} - \{-2\}$ l'équation $U(x) = -1$.

$U(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{3x - 6}{x + 2} = -1 \Leftrightarrow 3x - 6 = -1(x + 2) \Leftrightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$. D'où $S = \{1\}$

b- Résolvons dans $\mathbb{R} - \{-2\}$ l'équation $U(x) = 1$.

$U(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{3x - 6}{x + 2} = 1 \Leftrightarrow 3x - 6 = (x + 2) \Leftrightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$. D'où $S = \{4\}$

c- Etudions le signe de $U(x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R} - \{-2\}$.

Pour cela dressons le tableau de signe de $U(x)$

Posons $\begin{cases} 3x - 6 = 0 \\ et \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ et \\ x = -2 \end{cases}$

D'où le tableau de signe de $U(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$	-2		2		$+\infty$
$3x - 6$	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x + 2$	$-$	0	$+$	|	$+$	
$U(x)$	$+$	|	$-$	|	$+$	

D'après le tableau de signe ci-dessus, on a :
Pour $x \in]-\infty\ ;\ -2[\cup]2\ ;\ +\infty[$, $U(x) > 0$

Pour $x \in]-2\ ;\ 2[$, $U(x) < 0$

Pour $x \in \{-2\ ;2\}$, $U(x) = 0$

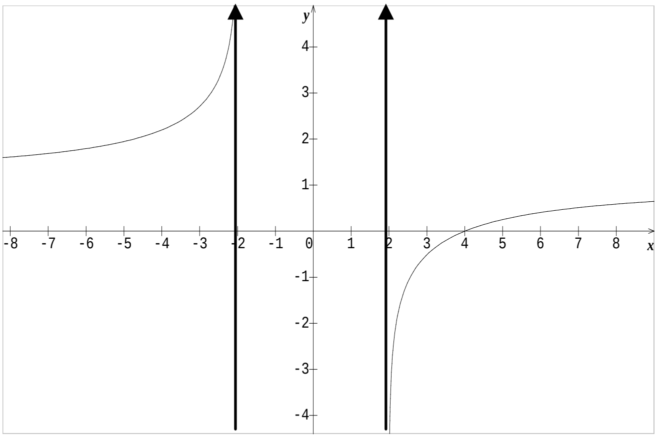
2) a- Etudions les variations de la fonction f définie par : $f(x) = ln\left(\frac{3x-6}{x+2}\right)$

f est définie si et seulement si : $\frac{3x-6}{x+2} > 0$ et $x + 2 \neq 0$

D'après 1) a), $D_f =]-\infty\ ;\ -2[\cup]2\ ;\ +\infty[$

$$f(x) = ln\left(\frac{3x-6}{x+2}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{3x-6} - \frac{1}{x+2} = \frac{3(x+2)-(3x-6)}{(3x-6)(x+2)} = \frac{12}{(3x-6)(x+2)}$$

Pour tout $\in D_f$, $f'(x) > 0$. Alors $\forall x \in D_f$ f est strictement croissante.
b- Traçons la courbe représentative (C) de la fonction f.



3) Soit la fonction g définie par : $g(x) = ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right|$

a- Ecrivons l'expression de $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

Posons $\begin{cases} 3x - 6 = 0 \\ et \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ et \\ x = -2 \end{cases}$

x	$-\infty$	-2		2		$+\infty$
$3x - 6$	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x + 2$	$-$	0	$+$	|	$+$	
$g(x)$	$+$	||	$-$	|	$+$	
$\|g(x)\|$	$ln\left(\frac{3x-6}{x+2}\right)$	||	$ln\left(\frac{-3x+6}{x+2}\right)$	|	$ln\left(\frac{3x-6}{x+2}\right)$	

D'après le tableau de signe ci-dessus, on a :

Pour $x \in]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]2\,;\,+\infty[$, $g(x) = ln\left(\frac{3x-6}{x+2}\right)$

Pour $x \in]-2\,;\,2[$, $g(x) = ln\left(\frac{-3x+6}{x+2}\right)$

b- Etudions les variations de la fonction g.

- Pour $x \in]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]2\,;\,+\infty[$, $g(x) = ln\left(\frac{3x-6}{x+2}\right)$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} ln\left(\frac{3x-6}{x+2}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} ln\left(\frac{3x}{x}\right) = ln3$

$\lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = -\infty$

$g(x) = ln\left(\frac{3x-6}{x+2}\right) \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{12}{(3x-6)(x+2)}$

D'où pour $x \in]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]2\,;\,+\infty[$, le tableau de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$g(x)$	$+$				$+$
$g'(x)$	$ln3 \nearrow$	$+\infty$		$-\infty$	$\nearrow ln3$

- Pour $x \in]-2\,;\,2[$, $g(x) = ln\left(\frac{-3x+6}{x+2}\right)$

$\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = -\infty$

$g(x) = ln\left(\frac{-3x+6}{x+2}\right) \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{-12}{(-3x+6)(x+2)}$

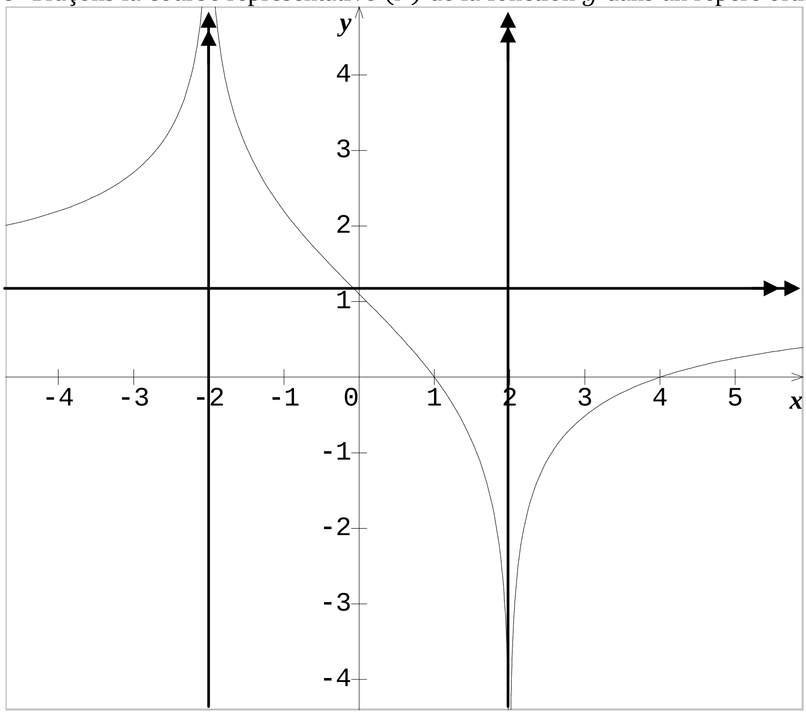
D’où pour $x \in]-2\,;\,2[$, le tableau de variation de g est le suivant :

x		-2		2	
$g(x)$		0	$-$	0	
$g'(x)$		$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	

Ainsi la réunion de ces deux tableaux donne :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$ln3$	$\nearrow$	$+\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, -\infty$	$\nearrow$	$ln3$

c- Traçons la courbe représentative (Γ) de la fonction g dans un repère orthonormé.



d- Montrons que (Γ)admet pour centre de symétrie le point $\omega(0\,;log3)$

Le point $\omega(0\,;ln3)$est centre de symétrie pour la courbe (Γ) de g si et seulement si :

$g[2(0)-x]+g(x)=2(ln3) \;\Leftrightarrow\; g(-x)+g(x)=2ln3$

$g(-x) + g(x) = ln\left|\frac{-3x-6}{-x+2}\right| + ln\left|\frac{3x-6}{x+2}\right| = ln\left|\left(\frac{-3x-6}{-x+2}\right)\left(\frac{3x-6}{x+2}\right)\right| = ln\left|9\left(\frac{x^2-4}{x^2-4}\right)\right| = ln|9|$

=> $g(-x) + g(x) = ln9 = ln3^2 = 2ln3$

D'où le point $\omega(0\,; ln3)$est centre de symétrie pour la courbe (Γ) de g.

4) Soit h l'application de $]-2\,;\ 2[$ dans ℝ telle que: $h(x) = ln\left(\frac{-3x+6}{x+2}\right)$
Montrons que h est une bijection de $]-2\,;\ 2[$ sur ℝ
$h(x)$ est définie, continue et strictement décroissante sur $]-2\,;\ 2[$ dans ℝ.
Elle réalise donc une bijection de $]-2\,;\ 2[$ sur ℝ.

Déterminons l'application réciproque h^{-1} de h.

Posons $h(x) = y$

$\Leftrightarrow ln\left(\frac{-3x+6}{x+2}\right) = y$

$\Leftrightarrow \frac{-3x+6}{x+2} = e^y$
$\Leftrightarrow -3x + 6 = e^y(x + 2)$

$\Leftrightarrow -3x - xe^y = 2e^y - 6$

$\Leftrightarrow -x(3 + e^y) = 2e^y - 6$

$\Leftrightarrow x(3 + e^y) = -2e^y + 6$

$\Leftrightarrow x(3 + e^y) = 6 - 2e^y$

$\Leftrightarrow x = \frac{6-2e^y}{3+e^y}$

D'où l'application réciproque h^{-1} de h est $h^{-1}(x) = \frac{6-2e^x}{3+e^x}$

Bac. Session de Juin 1991

Exercice 1……………………………………………………..……($5\ points$)

On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme u_1 non nul et de raison $q > 0$.

1) Calcule la raison q de cette suite sachant que : $81u_{14} = u_{10}$.

2) On considère la somme $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exprime S_n en fonction de u_1 et n.

3) Préciser u_1 sachant que : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2$

Exercice 2……………..…………………………………………($5\ points$)

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. P est le plan complexe muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. $(unité : 2\ cm)$

1) Vérifie que pour tout nombre complexe Z, on a :

$Z^4 - 4Z^3 + 6Z^2 - 4Z + 5 = (Z^2 + 1)(Z^2 - 4Z + 5)$ Puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$Z^4 - 4Z^3 + 6Z^2 - 4Z + 5 = 0$

2) A est le point d'affixe i,

B est le point d'affixe $-i$,

C est le point d'affixe $2 - i$,

D est le point d'affixe $2 + i$,

Quelle est la nature du quadrilatère ABCD?

$\big(On\ placera\ les$ les points A ; B ; C et D dans le plan P$\big)$

Problème……………………….………..…………………($10\ points$)

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

1) Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2) a-Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition D_f .

b- En déduis l'équation des éventuelles asymptotes à la courbe (C).

On notera Δ l'asymptote oblique

3) Dresse le tableau de variation de la fonction f.

4) Démontre que le point $A(0\ ;0)$est centre de symétrie pour la courbe (C) de f.

5) Construis la courbe (C).

6) A l'aide d'une intégration par parties, Calcule l'aire de la surface délimitée par la courbe (C), l'axe (ox) et les droites d'équations $x = 4$ et $x = 6$

Correction Bac 1991

Exercice 1……………………………………………………..……($5\ points$)

On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme u_1 non nul et de raison $q > 0$.

1) Calculons la raison q de cette suite sachant que : $81u_{14} = u_{10}$.

u_n étant une suite géométrique de premier terme u_1, alors son expression est : $u_n = u_1 \times q^n$

$u_{10} = u_1 \times q^{10} = 81u_{14}$ => $u_{14} = \frac{u_1 \times q^{10}}{81}$

D'autre part $u_n = u_1 \times q^n$=> $u_{14} = u_1 \times q^{14}$

Par identification on a : $\frac{u_1 \times q^{10}}{81} = u_1 \times q^{14} \Leftrightarrow \frac{q^{10}}{81} = q^{14} \Leftrightarrow \frac{q^{10}}{81} = q^{10} \times q^4 \Leftrightarrow \frac{1}{81} = q^4$

=> $q = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$

2) On considère la somme $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exprimons S_n en fonction de u_1 et n.

$$S_n = \frac{u_1[1-(q)^n]}{1-q} = \frac{u_1\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}} = \frac{u_1\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{\frac{2}{3}} = \frac{3u_1\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{2} = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \times u_1$$

3) Précisons u_1 sachant que : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \times u_1 = 2$

Puisque $\frac{1}{3} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Donc on a : $\frac{3}{2} \times u_1 = 2$ => $u_1 = \frac{4}{3}$

Exercice 2…………………..…………………………………………($5\ points$)

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. P est le plan complexe muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. $(unité : 2\ cm)$

1) Vérifions que pour tout nombre complexe Z, on a :

$Z^4 - 4Z^3 + 6Z^2 - 4Z + 5 = (Z^2 + 1)(Z^2 - 4Z + 5)$

En développant $(Z^2 + 1)(Z^2 - 4Z + 5)$, on obtient bien $Z^4 - 4Z^3 + 6Z^2 - 4Z + 5$

D'où: $Z^4 - 4Z^3 + 6Z^2 - 4Z + 5 = (Z^2 + 1)(Z^2 - 4Z + 5)$

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^4 - 4Z^3 + 6Z^2 - 4Z + 5 = 0$

$Z^4 - 4Z^3 + 6Z^2 - 4Z + 5 = 0 \Leftrightarrow (Z^2 + 1)(Z^2 - 4Z + 5) = 0$

=> $Z^2 + 1 = 0$ ou $Z^2 - 4Z + 5 = 0$

$Z^2 + 1 = 0$ => $Z^2 = -1 \Leftrightarrow Z^2 = i^2$ => $Z = -i$ ou $Z = i$

$Z^2 - 4Z + 5 = 0$ => $\Delta = -4 = 4i^2$

Alors $Z = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$ ou $Z = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$

=>$S = \{-i\ ; i\ ;\ 2 - i\ ;\ 2 + i\}$

2) Soient : A est le point d'affixe i => $Z_A = i$

B est le point d'affixe $-i$ => $Z_B = -i$

C est le point d'affixe $2 - i$ => $Z_C = 2 - i$

D est le point d'affixe $2 + i$ => $Z_D = 2 + i$

Déterminons la nature du quadrilatère ABCD

Calculons $|Z_B - Z_B|$ et $|Z_D - Z_C|$

$|Z_B - Z_B| = |(-i) - (i)| = |-2i| = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

$|Z_D - Z_C| = |(2 + i) - (2 - i)| = |2i| = \sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = 2$

Puisque $|Z_B - Z_B| = |Z_D - Z_C| = 2$, alors le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

<u>Problème</u>……………………………..………..……………………(10 *points*)

On considère la fonction f définie de ℝ vers ℝ par : $f(x) = x - 2ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$.

1) Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

f est définie si et seulement si $\frac{x+2}{x-2} > 0$ et $x - 2 \neq 0$

Posons $\begin{cases} x + 2 = 0 \\ et \\ x - 2 = 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} x = -2 \\ et \\ x = 2 \end{cases}$

D'où le tableau de signe de $U(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$ $\quad$ -2		2 $\quad$ $+\infty$
$x + 2$	$-$		$+$
$x - 2$	$-$		$+$
$\frac{x+2}{x-2}$	$+$		$+$

Alors $D_f =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

2) a-Calculons les limites aux bornes de l'ensemble de définition D_f .

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = x - 2ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \lim_{x \to -\infty} x - 2ln\left(\frac{x}{x}\right) = -\infty - 2ln1 = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = x - 2ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \lim_{x \to +\infty} x - 2ln\left(\frac{x}{x}\right) = +\infty - 2ln1 = +\infty$

$\lim_{x \to -2^-} x - 2ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = -2 - 2(-\infty) = +\infty$

$\lim_{x \to 2^+} x - 2ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = 2 - 2(+\infty) = -\infty$

b- Déduction de l'équation des éventuelles asymptotes à la courbe (C).

On notera Δ l'asymptote oblique

$x = -2$ et $x = 2$ sont asymptotes verticales.

$y = x$ est asymptotes oblique à la courbe (C) en $-\infty$ et $+\infty$

3) Dressons le tableau de variation de la fonction f.

$f(x) = x - 2ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$ => $f'(x) = 1 - 2\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}\right) = 1 - 2\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}\right) = \frac{x^2+8}{x^2-4}$

$\forall x \in D_f$, $x^2 + 8 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe du dénominateur $x^2 - 4$.

Posons $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$ => $x = -2$ ou $x = 2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0		0	$+$
$f'(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$		$-\infty$	$\nearrow +\infty$

4) Démontre que le point $A(0\,;0)$est centre de symétrie pour la courbe (C) de f.

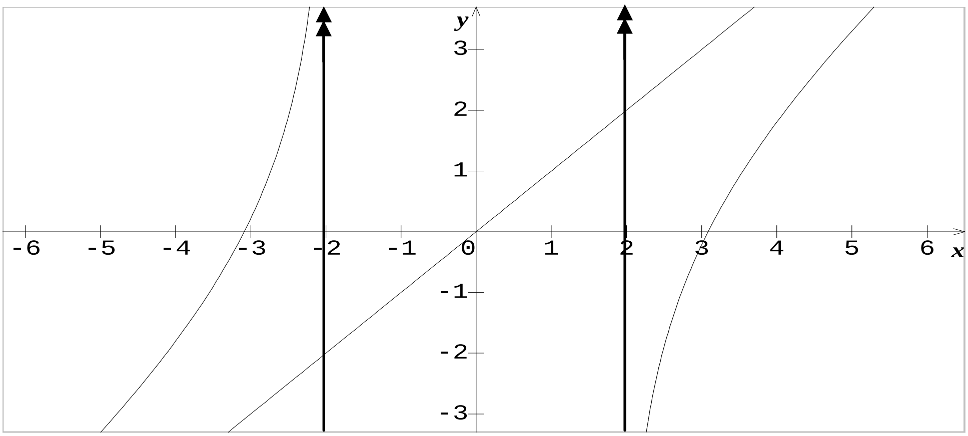
Le point $A(0\,;0)$est centre de symétrie pour la courbe (C) de f si et seulement si :
$f[2(0) - x] + f(x) = 2(0) \Leftrightarrow f(-x) + f(x) = 0$

$f(-x) + f(x) = -x - 2ln\left(\frac{-x+2}{-x-2}\right) + x - 2ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = -2ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) - 2ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$

$= -2\left[ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right] = -2ln\left[\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right] = -2ln\left[\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)}\right] = -2ln1 = 0$

D'où le point $A(0\,;0)$est centre de symétrie pour la courbe (C) de f.

5) Construction de la courbe (C).



6) A l'aide d'une intégration par parties, calculons l'aire de la surface délimitée par la courbe (C), l'axe (ox) et les droites d'équations $x = 4$ et $x = 6$

$\mathscr{A} = \int_4^6 f(x)dx = \int_4^6 \left[x - 2ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right]dx = \int_4^6 xdx + \int_4^6 -2ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)dx$

Intégrons par parties l'expression $\int_4^6 -2ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)dx$

Posons $u(x) = -2ln\left(\frac{x + 2}{x - 2}\right)$ => $u'(x) = \frac{8}{x^2 - 4}$

$v'(x) = 1$ => $v(x) = x$

=> $\int_4^6 -2ln\left(\frac{x + 2}{x - 2}\right)dx = \left[-2xln\left(\frac{x + 2}{x - 2}\right)\right]_4^6 - \int_4^6 \frac{8x}{x^2 - 4}dx$

=> $\int_4^6 -2ln\left(\frac{x + 2}{x - 2}\right)dx = \left[-2xln\left(\frac{x + 2}{x - 2}\right)\right]_4^6 - 4\int_4^6 \frac{2x}{x^2 - 4}dx$

=> $\int_4^6 -2ln\left(\frac{x + 2}{x - 2}\right)dx = \left[-2xln\left(\frac{x + 2}{x - 2}\right)\right]_4^6 - 4[ln(x^2 - 4)]_4^6$

=> $\int_4^6 -2ln\left(\frac{x + 2}{x - 2}\right)dx = \left[-2xln\left(\frac{x + 2}{x - 2}\right) - 4ln(x^2 - 4)\right]_4^6$

Donc $\mathscr{A}=\int_4^6 xdx + \int_4^6 -2ln\left(\frac{x + 2}{x - 2}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^6 + \left[-2xln\left(\frac{x + 2}{x - 2}\right) - 4ln(x^2 - 4)\right]_4^6$

=> $\mathscr{A}= \left[\frac{1}{2}x^2 - 2xln\left(\frac{x + 2}{x - 2}\right) - 4ln(x^2 - 4)\right]_4^6 = 6{,}54\ cm^2$

Bac. Session de Juin 1992

Exercice 1……………………………………………………..……($\mathbf{5}\ \boldsymbol{points}$)

Un sac contient 6 boules indiscernables au toucher numérotées : $\mathbf{1}$; $\mathbf{1}$; $\mathbf{1}$; $\mathbf{2}$; $\mathbf{2}$; $\mathbf{3}$.
On tire simultanément 2 boules au hasard de ce sac et on note X la somme des numéros portés par les 2 boules tirées.
1) Indique les valeurs possibles de X.
2) Donne la loi de probabilité de X.
3) Calcule l'espérance mathématique et la variance de X.
4) Calcule la probabilité de l'évènement 3≤X< 7.

Exercice 2………………..…………………………………………($\mathbf{5}\ \boldsymbol{points}$)

Calcule l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (cos^6 x + sin^6 x)dx$

Problème……………………………..…………...……………………($\mathbf{10}\ \boldsymbol{points}$)

On considère la fonction f définie de ℝ vers ℝ par : $f(x) = x^2 e^x$.
On désigne par (Cf) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.
1) Dresse le tableau de variation de la fonction f puis Trace sa courbe.
2) Trace dans le même repère la courbe (Cg) de la fonction $g(x) = e^x$
3) Détermine les points communs à (Cf) et (Cg).
4) Calcule l'aire de la portion du plan définie par l'ensemble des points $M(x\ ;y)$ tels que :
$-1 \leq x \leq 1$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$

Correction Bac 1992

Exercice 1……………………………………………………..……$(5\ points)$

Un sac contient 6 boules indiscernables au toucher numérotées : **1** ; **1** ; **1** ; **2** ; **2** ; **3**.
On tire simultanément 2 boules au hasard de ce sac et on note X la somme des numéros portés par les 2 boules tirées.

1) Indiquons les valeurs possibles de X.
Les valeurs prises par X sont : $\{2 ; 3 ; 4 ; 5\}$

2) Donnons la loi de probabilité de X.

Alors calculons : $P(\mathrm{X}=2)$; $P(\mathrm{X}=3)$; $P(\mathrm{X}=4)$; $P(\mathrm{X}=5)$

$$P(\mathrm{X}=2)=\frac{Card\ (X=2)}{Card\ (\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} Card(X=2)=3 \\ et \\ Card(\Omega)=C_6^2=15 \end{cases} \Rightarrow P(\mathrm{X}=2)=\frac{3}{15}$$

$$P(\mathrm{X}=3)=\frac{Card\ (X=3)}{Card\ (\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} Card(X=3)=6 \\ et \\ Card(\Omega)=C_6^2=15 \end{cases} \Rightarrow P(\mathrm{X}=3)=\frac{6}{15}$$

$$P(\mathrm{X}=4)=\frac{Card\ (X=4)}{Card\ (\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} Card(X=4)=4 \\ et \\ Card(\Omega)=C_6^2=15 \end{cases} \Rightarrow P(\mathrm{X}=4)=\frac{4}{15}$$

$$P(\mathrm{X}=5)=\frac{Card\ (X=5)}{Card\ (\Omega)} \text{ avec } \begin{cases} Card(X=5)=2 \\ et \\ Card(\Omega)=C_6^2=15 \end{cases} \Rightarrow P(\mathrm{X}=5)=\frac{2}{15}$$

D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

x_i	2	3	4	5
$\mathrm{P}(X=x_i)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

3) Calculons l'espérance mathématique et la variance de X.

Son espérance mathématique est : $E(\mathrm{X})=2\times\frac{3}{15}+3\times\frac{6}{15}+4\times\frac{4}{15}+5\times\frac{2}{15}=\frac{10}{3}$

Sa variance est : $V(\mathrm{X})=2^2\times\frac{3}{15}+3^2\times\frac{6}{15}+4^2\times\frac{4}{15}+5^2\times\frac{2}{15}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

4) Calculons la probabilité de l'évènement $3\leq \mathrm{X}<7$.
$P(3\leq \mathrm{X}<7)=P(\mathrm{X}=3)+P(\mathrm{X}=4)+P(\mathrm{X}=5)=\frac{6}{15}+\frac{4}{15}+\frac{2}{15}=\frac{4}{5}$

Exercice 2……………..…………………………………………($5\ points$)

Calculons l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(cos^6x + sin^6x)dx$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(cos^6x + sin^6x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}[(cos^2x)^3 + (sin^2x)^3]dx\ (sous\ la\ forme\ a^3 + b^3)$

Or $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}[cos^2x + sin^2x][(cos^2x)^2 - cos^2x \times sin^2x + (sin^2x)^2]dx$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(cos^2x + sin^2x)(cos^4x - cos^2x \times sin^2x + sin^4x)dx$

Or $cos^2x + sin^2x = 1$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(cos^4x - cos^2x \times sin^2x + sin^4x)dx$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(cos^4x - 2cos^2x \times sin^2x + sin^4x + cos^2x \times sin^2x)dx$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}[(cos^4x - 2cos^2x \times sin^2x + sin^4x) + cos^2x \times sin^2x]dx$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}[(cos^2x - sin^2x)^2 + (cosx \times sinx)^2]dx$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}[(cos2x)^2 + (cosx \times sinx)^2]dx$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[(cos2x)^2 + \left(\frac{1}{2}sin2x\right)^2\right]dx$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(cos^2 2x + \frac{1}{4}sin^2 2x\right)dx$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4cos^2 2x + sin^2 2x}{4}\right)dx$

Or $cos^2 2x + sin^2 2x = 1 \quad => sin^2 2x = 1 - cos^2 2x$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4cos^2 2x + 1 - cos^2 2x}{4}\right)dx$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1 + 3cos^2 2x}{4}\right)dx$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}cos^2 2x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3}{4}cos^2 2xdx$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}dx + \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos^2 2xdx$

Or $cos^2 2x = \frac{1 + cos4x}{2}$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}dx + \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1 + cos4x}{2}dx$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}dx + \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1 + cos4x)dx$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} cos4x\right) dx$

$=> I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8} cos4x\right) dx$

$=> I = \left[\frac{5}{8}x + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=> I = \left[\frac{5}{8}x + \frac{3}{32} sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=> I = \left[\frac{5}{8}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{32} sin4\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[\frac{5}{8}(0) + \frac{3}{32} sin4(0)\right]$

$=> I = \left(\frac{5\pi}{32}\right) - (0) = \frac{5\pi}{32}$

<u>Problème</u>……………………………..………..…………………….$(\mathbf{10\ points})$

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2e^x$.
On désigne par (Cf) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

1) Dressons le tableau de variation de la fonction f

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^x = 0$

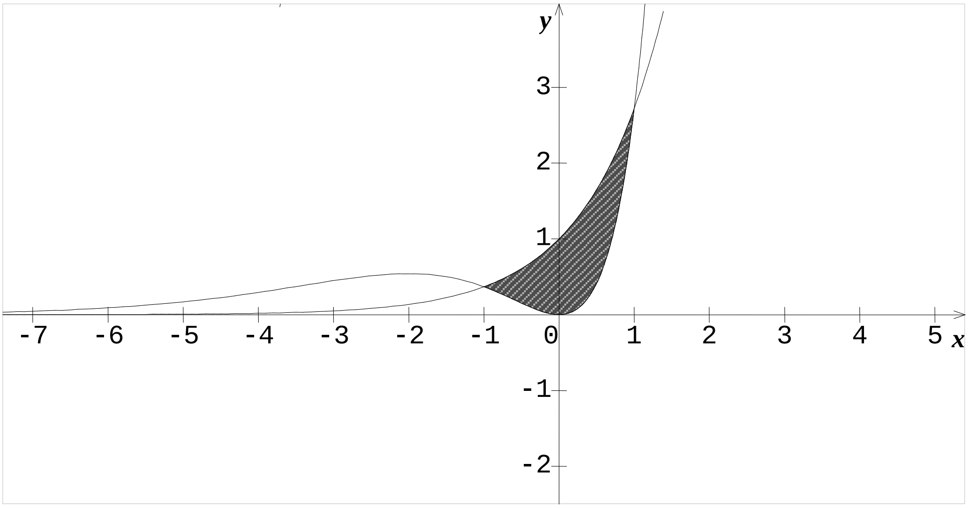
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2e^x = +\infty$

$f(x) = x^2e^x \ => f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$

Pour tout $x \in D_f, e^x > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $x^2 + 2x$.
Posons $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \quad => \ x = 0 \quad$ ou $\ x = -2$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Traçons (Cf)



2) Traçons dans le même repère la courbe (Cg) de la fonction $g(x) = e^x(voir\ graphique)$

3) Déterminons les points communs à (Cf) et (Cg).

Pour cela résolvons l'équation $f(x) - g(x) = 0$

$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2e^x - e^x = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)e^x = 0$

=> $e^x \neq 0$ ou $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$ => $x = -1$ ou $x = 1$

- Si $x = -1$ => $y = g(-1) = e^{-1}$ => $P_1(-1\,;e^{-1})$

- Si $x = 1$ => $y = g(1) = e$ => $P_2(1\,;e)$

4) Calculons l'aire de la portion du plan définie par l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que : $-1 \leq x \leq 1$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$

$\mathscr{A}=\int_{-1}^{1}\big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_{-1}^{1}(x^2 - 1)e^x dx$

Posons $u(x) = x^2 - 1$ => $u'(x) = 2x$
$v'(x) = e^x$ => $v(x) = e^x$

=> $\mathscr{A}=[(x^2 - 1)e^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2xe^x dx$

=> $\mathscr{A}=[(x^2 - 1)e^x]_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} xe^x dx$

Posons $I = \int_{-1}^{1} xe^x dx$

=> $\mathscr{A}=[(x^2 - 1)e^x]_{-1}^{1} - 2I$

$I = \int_{-1}^{1} xe^x dx$

Posons $u(x) = x$ => $u'(x) = 1$
$v'(x) = e^x$ => $v(x) = e^x$

$I = [xe^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx$

=>$I = [xe^x]_{-1}^{1} - [e^x]_{-1}^{1}$

=>$I = [xe^x - e^x]_{-1}^{1}$

Or $\mathscr{A}$=$[(x^2 - 1)e^x]_{-1}^{1} - 2I$

=> $\mathscr{A} = [(x^2 - 1)e^x]_{-1}^{1} - 2[xe^x - e^x]_{-1}^{1}$

=> $\mathscr{A} = [(x^2 - 1)e^x]_{-1}^{1} - [2xe^x - 2e^x]_{-1}^{1}$

=> $\mathscr{A} = [(x^2 - 1)e^x - 2xe^x + 2e^x]_{-1}^{1}$

=> $\mathscr{A} = (0) - (4e^{-1}) = -4e^{-1} = -1{,}47cm^2$

Bac. Session de Juin 1996

Exercice 1...(**5 points**)

Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches indiscernables au toucher.
On tire simultanément et au hasard 3 boules.
1) Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :
a- Aucune boule rouge n'est tirée.
b- Une boule rouge et une seule est tirée.
c- Deux boules rouges et deux sont tirées.
d- Une boule rouge au moins est tirée.
2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées. Donne la loi de probabilité de X.

Exercice 2...(**5 points**)

Soient les intégrales suivantes :
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2 x cos^2 x dx$
1) Calcule $I - J$ et $I + J + K$
2) En déduis la valeur de : $I + J - 3K$ puis celles de I ; J et K.

Problème...(**10 points**)

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. P est le plan complexe muni du repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$. $(unité : 2\ cm)$
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, la fonction définie pour tout $Z \in \mathbb{C}$ par :
$f(Z) = Z^3 - (2+i)Z^2 + 2(1+i)Z - 2i$.
1) Calcule $f(i)$ puis en déduis que $f(Z)$ peut s'Exprime comme produit d'un polynôme du premier degré par un polynôme du second degré de la variable réelle Z.
2) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(Z) = 0$ puis Calcule le module et un argument de chaque solution de l'équation $f(Z) = 0$.
3) On désigne par Z_1 ; Z_2 et Z_3 les racines de l'équation $f(Z) = 0$; Z_2 étant celle dont l'argument est $\frac{\pi}{2}$.
a- Etablir que Z_1 ; Z_2 et $-\frac{1}{2}\ Z_3$ sont des termes consécutifs d'une suite géométrique dont on déterminera la raison.
b- Calcule la somme S_n des n premiers termes de cette suite.

4) On considère la suite (u_n) $n \in \mathbb{N}$, définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ 2u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$
a- Montre que la suite de terme général $v_n = u_n - 1$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme v_0 et la raison q.
b- Exprime u_n en fonction de n puis Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$
c- Calcule $\sum_{i=0}^{n} u_i$

Correction Bac 1996

Exercice 1……………………………………………………..……$(5\ points)$

Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches indiscernables au toucher.
On tire simultanément et au hasard 3 boules.
1) Calculons la probabilité de chacun des évènements suivants :
a- Aucune boule rouge n'est tirée.

$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56} = 0{,}018$

b- Une boule rouge et une seule est tirée.

$P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56} = 0{,}268$

c- Deux boules rouges et deux sont tirées.

$P(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56} = 0{,}536$

d- Une boule rouge au moins est tirée.

$P(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_3^2 + C_5^2 \times C_3^1 + C_5^3}{C_8^3} = \frac{55}{56} = 0{,}982$

2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées. Donnons la loi de probabilité de X.
Les valeurs possibles de X sont : X= $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

$P(\mathrm{X} = 0) = \frac{Card\ (X=0)}{Card\ (\Omega)} = \frac{C_5^0}{C_8^3} = \frac{1}{56}$

$P(\mathrm{X} = 1) = \frac{Card\ (X=1)}{Card\ (\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}$

$P(\mathrm{X} = 2) = \frac{Card\ (X=2)}{Card\ (\Omega)} = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56}$

$P(\mathrm{X} = 3) = \frac{Card\ (X=3)}{Card\ (\Omega)} = \frac{C_5^3 \times C_3^0}{C_8^3} = \frac{10}{56}$

D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

x_i	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

Exercice 2……………..…………………………………………$(5\ points)$

Soient les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2 x cos^2 x dx$

1) Calculons $I - J$ et $I + J + K$

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^4x - sin^4x)dx$

$\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2x - sin^2x)(cos^2x + sin^2x)dx$

Or $\quad cos^2x - sin^2x = cos2x$ et $cos^2x + sin^2x = 1$

$=> \; I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2x\,dx \; => \; I - J = \left[\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = 0$

$=> \; I - J = 0$

Calculons $I + J + K$

$I + J + K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2xcos^2xdx$

$\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^4x + sin^4x + 2sin^2xcos^2x)dx$

$\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^4x + 2sin^2xcos^2x + sin^4x)dx$

$\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2x + sin^2x)^2dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1)^2dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

$=> I + J + K = \frac{\pi}{2}$

2) Calculons : $I + J - 3K$ puis en déduis les valeurs de I ; J et K.

$I + J - 3K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2xcos^2xdx$

$\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx - 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^2xdx$

$\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^2xdx - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^2xdx$

$\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^4x - 2sin^2xcos^2x + sin^4x)dx \; - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4sin^2xcos^2xdx$

$\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2x - sin^2x)^2dx \; - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2cosxsinx)^2dx$

$\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos2x)^2dx \; - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin2x)^2dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^22x - sin^22x)dx$

$\quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos4xdx \; = \left[\frac{1}{4}sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0 \; => \; I + J - 3K = 0$

Ainsi pour en déduis les valeurs de I ; J et K ; on forme le système avec les équations :

$I - J = 0$; $I + J + K = \frac{\pi}{2}$ et $I + J - 3K = 0$

$$=> \begin{cases} I - J = 0 & (\mathbf{1}) \\ I + J + K = \frac{\pi}{2} & (\mathbf{2}) \\ I + J - 3K = 0 & (\mathbf{3}) \end{cases}$$

L'équation **(1)** donne $I - J = 0 => I = J$ puis en remplaçant I par J dans les equations : **(2)** et **(3)** , on a :

$$\begin{cases} J + J + K = \frac{\pi}{2} \\ J + J - 3K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2J + K = \frac{\pi}{2} \\ 2J - 3K = 0 \end{cases}$$

La resolution de ce système Donne: $J = \frac{3\pi}{16}$ et $K = \frac{\pi}{8}$.

En remplaçant J par sa valeur dans l'équation **(1) ,** on a : $I = \frac{3\pi}{16}$

<u>Problème</u>……………………………..………...…………………….($\mathbf{10}$ $\boldsymbol{points}$)

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. P est le plan complexe muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. $(unité : 2\ cm)$

Soit f : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, la fonction définie pour tout $Z \in \mathbb{C}$ par :

$f(Z) = Z^3 - (2+i)Z^2 + 2(1+i)Z - 2i.$

1) Calculons $f(i)$

$f(Z) = Z^3 - (2+i)Z^2 + 2(1+i)Z - 2i$

=> $f(i) = i^3 - (2+i)i^2 + 2(1+i)i - 2i = 0$

Factorisons $f(Z)$

	1	$-2-i$	$2+2i$	$-2i$
$\boldsymbol{i}$		i	$-2i$	$2i$
	1	-2	2	0
$\boldsymbol{Z_0}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	

=> $f(Z) = Z^3 - (2+i)Z^2 + 2(1+i)Z - 2i = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$

=> $f(Z) = (Z - i)(Z^2 - 2Z + 2)$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(Z) = 0$

$f(Z) = 0 \Leftrightarrow (Z - i)(Z^2 - 2Z + 2) = 0$

$Z - i = 0$

$Z^2 - 2Z + 2 = 0 \Rightarrow \Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$

$Z' = 1 - i$

$Z'' = 1 + i$

$\Rightarrow S = \{\ i\ ;\ 1 - i\ ;\ 1 + i\}$

Calculons le module et un argument de chaque solution de l'équation $f(Z) = 0$.

$Z_0 = i \Rightarrow |Z_0| = 1$ et $arg(Z_0) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$Z' = 1 - i \Rightarrow |Z'| = \sqrt{2}$ et $arg(Z') = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$Z'' = 1 + i \Rightarrow |Z''| = \sqrt{2}$ et $arg(Z'') = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

3) On désigne par Z_1 ; Z_2 et Z_3 les racines de l'équation $f(Z) = 0$; Z_2 étant celle dont l'argument est $\frac{\pi}{2}$.

=>$Z_1 = 1 - i$; $Z_2 = i$; $Z_3 = 1 + i$

a- Etablissons que Z_1 ; Z_2 et $-\frac{1}{2} Z_3$ sont des termes consécutifs d'une suite géométrique.
Z_1 ; Z_2 et $-\frac{1}{2} Z_3$ sont les termes consécutifs d'une suite géométrique si

$$(Z_2)^2 = (Z_1)\left(-\frac{1}{2} Z_3\right)$$

$$(Z_2)^2 = (i)^2 = -1$$

$$(Z_1)\left(-\frac{1}{2} Z_3\right) = -\frac{1}{2}(1-i)(1+i) = -\frac{1}{2}(1+1) = -\frac{1}{2} \times 2 = 1$$

Puisque $(Z_2)^2 = (Z_1)\left(-\frac{1}{2} Z_3\right)$. Alors Z_1 ; Z_2 et $-\frac{1}{2} Z_3$ sont les termes consécutifs d'une suite géométrique.

Déterminons la raison de cette suite.

$$q = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+i}{1+1} = \frac{-1+i}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{2}i = \frac{i}{2}(1+i)$$

b- Calculons la somme S_n des n premiers termes de cette suite.

$$S_n = \frac{Z_1[1-(q)^n]}{1-q} = \frac{(1-i)\left[1-\left[\frac{i}{2}(1+i)\right]^n\right]}{1-\frac{i}{2}(1+i)} = \frac{(1-i)\left[1-\left[\frac{i}{2}(1+i)\right]^n\right]}{\frac{2-i(1+i)}{2}} = \frac{(1-i)\left[1-\left[\frac{i}{2}(1+i)\right]^n\right]}{\frac{2-i+1}{2}}$$

$$= \frac{2(1-i)\left[1-\left[\frac{i}{2}(1+i)\right]^n\right]}{3-i}$$

4) On considère la suite (u_n) $n \in \mathbb{N}$, définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ 2u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$

a- Montrons que la suite de terme général $v_n = u_n - 1$ est une suite géométrique dont on Déterminera le premier terme v_0 et la raison q.

v_n est une suite géométrique si et seulement si : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$ ou $v_{n+1} = qv_n$

$v_n = u_n - 1$ => $v_{n+1} = u_{n+1} - 1$. Or $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$

=> $v_{n+1} = \frac{u_n+1}{2} - 1 = \frac{u_n+1-2}{2} = \frac{u_n-1}{2} = \frac{1}{2}(u_n - 1) = \frac{1}{2}v_n$

D'où v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme :

$v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

b- Exprimons u_n en fonction de n

v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

Alors son expression est donnée par $v_n = v_0 \times (q)^n$

=> $v_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

D'autre part $v_n = u_n - 1$ => $u_n = v_n + 1$. Or $v_n = \frac{1}{2^n}$

=> $u_n = \frac{1}{2^n} + 1$ ou $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$

Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$. Puisque $\frac{1}{2} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 + 1 = 1$.

c- Calculons $\sum_{i=0}^{n} u_i$

$\sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n}(v_i - 1) = \sum_{i=0}^{n} v_i + (n + 1)$

Or $\sum_{i=0}^{n} v_i = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

=> $\sum_{i=0}^{n} u_i = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + (n + 1) = 3 - \frac{1}{2^n} + n$

Bac. Session de Juin 1997

Exercice 1……………………………………………………..……$(\mathbf{5}\ \boldsymbol{points})$

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 1)e^{-3x}$.
Trouve trois nombres réels a ; b et c tels que la fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-3x}$ soit une primitive de f dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2………………..……………………………………………$(\mathbf{5}\ \boldsymbol{points})$

Soit l'application f: $[0\ ;\ +\infty[\ \to \mathbb{R}$

$$x \to \frac{x^2}{x^2+1}$$

1) Trouve l'intervalle J tel que $J = f([0\ ;\ +\infty[\ )$
2) Montre que f est une bijection de $[0\ ;\ +\infty[$ sur J.
3) Représente graphiquement la courbe $\left(C_f\right)$ de la fonction f et celle de sa bijection réciproque $\left(C_{f^{-1}}\right)$ dans le même repère orthonormé.
$(On\ ne\ demande\ pas\ d'expliciter\ l'application\ reciproque\ f^{-1}.)$

Problème………………………...………...……………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$
1) Dresse le tableau de variation de g.
2) Calcule $g(1)$ puis en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$ et (C) sa courbe dans le repère orthonormé $\left(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm)
1) Dresse le tableau de variation de f.
2) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $(\alpha < \beta)$
3) a) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f.
b) Etudie le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ puis en déduis la position de (C) et (Δ).
4) Trace (C) et (Δ) dans le même repère.

Correction Bac 1997

Exercice 1………………………………………………………..……($\mathbf{5}$ $\boldsymbol{points}$)

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 1)e^{-3x}$.
Trouvons trois nombres réels a ; b et c tels que la fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-3x}$ soit une primitive de f dans $\mathbb{R}$.

F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$.
Avec $F'(x) = [-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c]e^{-3x}$.
$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow [-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c]e^{-3x} = (x^2 - 1)e^{-3x}$

$$\Leftrightarrow -3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 1 \\ 2a - 3b = 0 \\ b - 3c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{9} \\ c = \frac{7}{27} \end{cases}$$

D'où $F(x) = \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{7}{27}\right) e^{-3x}$

Exercice 2………………..…………………………………………….($\mathbf{5}$ $\boldsymbol{points}$)

Soit l'application f: $[0\,;\,+\infty[\; \to \mathbb{R}$

$$x \to \frac{x^2}{x^2+1}$$

1) Trouvons l'intervalle J tel que $J = f([0\,;\,+\infty[\,)$

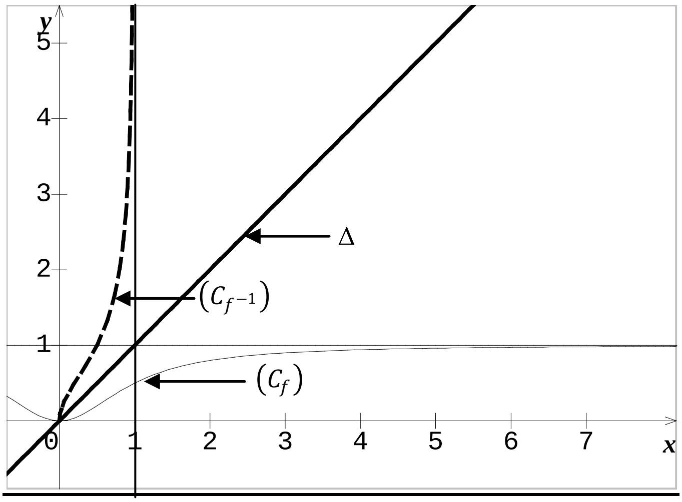
On a $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ => $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ => $\forall x \in [0\,;\,+\infty[,\ f'(x) > 0$

Alors$\forall x \in [0\,;\,+\infty[$, f est strictement croissante de $[0\,;\,+\infty[$ vers l'intervalle :
$J = f([0\,;\,+\infty[\,)$ .Avec $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
=> $J = f([0\,;\,+\infty[\,) = [0\,;\,1[$

2) Montrons que f est une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ sur J.
f étant strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors elle réalise une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ vers J.

3) Représentons graphiquement la courbe $\left(C_f\right)$ de la fonction f et celle de sa bijection réciproque $\left(C_{f^{-1}}\right)$ de f^{-1},dans le même repère orthonormé.
Pour la construction $\left(C_f\right)$ et $\left(C_{f^{-1}}\right)$, se référer au théorème suivant :

Théorème :
La courbe représentative d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétrique par rapport à la première bissectrice Δ d'équation $y = x$.



Problème……………………………………………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $]\,0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1) Dressons le tableau de variation de g.

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} -x^2 + 1 - \ln x = -(0)^2 + 1 - (-\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 + 1 - \ln x = -(+\infty)^2 + 1 - (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty$

$g(x) = -x^2 + 1 - \ln x \Rightarrow g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\left(2x + \frac{1}{x}\right).$

Alors $\forall x \in\,]\,0\,;\,+\infty[\ \ g'(x) < 0$. D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$ 0	$-\infty$

2) Calculons $g(1)$ puis en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

$g(x) = -x^2 + 1 - \ln x \Rightarrow g(1) = 0$

Alors d'après le tableau de variation de g, on a :

$\forall x \in\,]\,0\,;\,1[\ \ g(x) > 0$ et $\forall x \in\,]\,1\,;\,+\infty[\ \ g(x) < 0$

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $]\,0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$ et (C) sa courbe dans le repère orthonormé $(\text{o}\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,)$ (unité graphique 2 cm)

1) Dressons le tableau de variation de f.

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x} = -\frac{1}{2}(0) + 1 + \frac{1}{2}(-\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x} = -\frac{1}{2}(+\infty) + 1 + \frac{1}{2}(0) = -\infty$

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1-lnx}{2x^2} = \frac{-x^2+1-lnx}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$

$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $2x^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.

Or d'après **Partie A 2)**, on a :

$\forall x \in]0\,;1[\ g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]0\,;1[\ f'(x) > 0$
et
$\forall x \in]1\,;+\infty[\ g(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]1\,;+\infty[\ f'(x) < 0$

x	0		α		1		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\infty$

2) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $(\alpha < \beta)$

D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in]0\,;1[$ f est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]0\,;1[$ vers $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$.

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une première solution α

De même , $\forall x \in]1\,;+\infty[$ f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]1\,;+\infty[$ vers $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une deuxième solution β

3) a) Montrons que la droite (Δ)d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f.

La droite (Δ)d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f si et seulement si

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x}\right) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x} + \frac{1}{2}x - 1$

$= \lim \frac{lnx}{2x} = \lim \frac{1}{2} \bullet \frac{lnx}{x} = \frac{1}{2}(0) = 0$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

D'où la droite (Δ)d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f

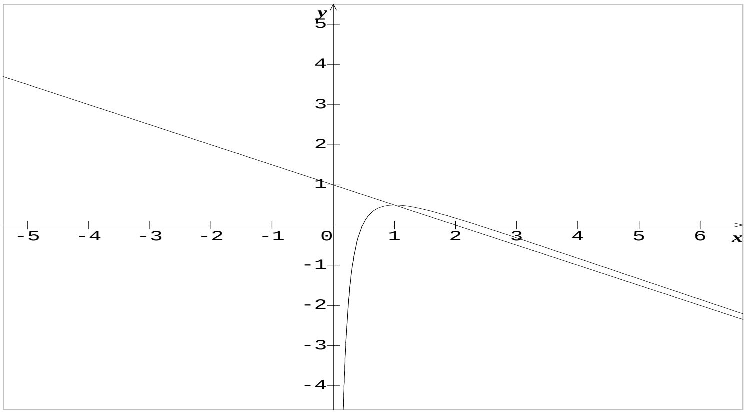
b) Etudions le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ puis en déduis la position de (C) et (Δ).

L'étude du signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ nous permet d'en déduis que :

- $\forall x \in]\,0\,;\,1[\,;$ (C) est en dessous de la droite (Δ)

- $\forall x \in]\,1\,;\,+\infty[\,;$ (C) est au dessus de la droite (Δ)

4) Traçons (C) et (Δ) dans le même repère.



Bac. Session de Juin 1998

Exercice 1……………………………………………………..……(5 *points*)

1) Simplifie l'expression $E = \frac{e^{2x+1}}{e^{2x-1}}$

2) On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = e^{2n-1}$

a- Calcule u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_{n+1}

b- Démontre $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite géométrique dont on précisera la raison.

c- Exprime en fonction de n, la somme $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + u_2 \ \ldots\ldots + u_n$.

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n$

d- Trouve la valeur minimale de n telle que $S_n \geq 10$.

NB : On donne $e \approx 2,7$; $e^2 = 7,3$; $e^2 = 19,7$; $ln171 \approx 5,14$.

3) Soit la suite v_n définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = ln(u_n)$

a) Exprime la somme $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$ en fonction de n

b) Exprime le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots\ldots \times u_n$ en fonction de n

Exercice 2……………….…………………………………………(5 *points*)

1) a-Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $Z^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)Z + 2 + \sqrt{3} = 0$. On notera Z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive.

b- On considère les nombres complexes $u = Z_1 + 1$ et $v = u^2 - 2$.

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormal $(o\ ;\ \vec{e}_1\ ;\ \vec{e}_2)$ d'unité graphique 2 cm, place les points A ; B ; C et D d'affixes respectifs 1 ; Z_1 ; u et v.

c- Démontre que les points A ; B et D sont alignés.

2) On considère la fonction q définie dans $\mathbb{R}$ par $q(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

a- Calcule $q(1)$ et $q(-1)$. En déduis qu'il existe un polynôme du second degré $q_1(x)$ tel que, pour tout nombre réel x, $q(x) = (x-1)(x+1) \bullet q_1(x)$.

b- Factoriser $q(x)$ puis Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $q(x) = 0$.

c- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $6 - e^x - 7e^{2x} + e^{3x} + e^{4x} = 0$.

3) f est la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1[$ par $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 1}{x+1}$

a- Détermine les réels a ; b ; c et d tels que pour $x \neq -1$, $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$

b- Calcule l'intégrale $I = \int_{-3}^{-2} f(x)dx$

Problème……………………………..………...……………………(10 *points*)

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x - 5$

1) Etudie le sens de variation de g.
   (On ne demande pas de Détermine les limites de g, ni de Construis sa courbe).
2) a) Calcule $g(0)$ et $g(2)$
   a) Démontre que l'équation : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x + x - 5 = 0$ admet une solution unique α et que : $1,30 < \alpha < 1,31$

<u>Partie B</u> :

Soit la fonction numérique f définie sur $\left]-\infty\,;\,5\right[$ par : $f(x) = ln(5 - x)$.

1) Etudie le sens de variation de f. Préciser les limites de f en 5 et en $-\infty$.
2) Prouve que $f(\alpha) = \alpha$
3) a) Démontre que $\forall\, x \in [0\,;3]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

   b) En déduis que $\forall\, x \in [0\,;3]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

   c) Démontre que si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$.
4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, $\vec{i}\,,\vec{j}$) , d'unité graphique (3 cm), on désigne son (C) la représentation graphique de la fonction f.

a) Trace la courbe (C), puis hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées (x, y) tel que : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ on notera (S) cette partie.

b) En remarquant que, $\forall\, x \neq 5$, $\frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$; Montre que $\int_{\alpha}^{4} \frac{x}{x-5}dx = 4 - 6\alpha$

c) Prouve que l'aire A de la partie (S) en cm^2est donnée par A = $-\alpha^2 + 6\alpha - 4$.
 (On utilisera une intégration par partie).

Correction Bac 1998

Exercice 1..(**5** ***points***)

1) Simplifions l'expression $E = \frac{e^{2x+1}}{e^{2x-1}}$

$E = \frac{e^{2x+1}}{e^{2x-1}}$ => $E = \frac{e^{2x} \times e}{e^{2x} \times e^{-1}} = \frac{e}{e^{-1}} = e \times e = e^2$

2) On considère la suite numérique $u_n$définie par $\forall\ n\ \in \mathbb{N}$, $u_n = \ e^{2n-1}$

a- Calculons u_0 ; u_1 ; u_2 ;u_3 et u_{n+1}

$u_0 = \ e^{-1}$; $u_1 = e$; $u_2 = e^3$; $u_3 = e^5$; $u_{n+1} = \ e^{2n+1}$

b- Démontrons que la suite u_n est une suite géométrique dont on précisera la raison.
u_n est une suite géométrique si et seulement si : $u_{n+1} = qu_n$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

$u_n = \ e^{2n-1}$ => $u_{n+1} = \ e^{2n+1}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{2n+1}}{e^{2n-1}} = e^{2n+1} \times e^{-2n+1} = e^{2n+1-2n+1}$
$= e^{1+1} = e^2$

D'où u_n est une suite géométrique de raison $q = e^2$ et de premier terme $u_0 = \ e^{-1}$

c- Exprimons en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots.. + u_n$

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q est :

$S_n = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{\left(1-(e^2)^{n+1}\right)e^{-1}}{1-e^2} = \frac{(1-e^{2n+2})e^{-1}}{1-e^2} = \frac{e^{-1}-e^{2n+1}}{1-e^2}$

En déduisons $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^{-1}-e^{2n+1}}{1-e^2} = -\infty$

d- Trouvons la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$

$S_n \geq 10 \Leftrightarrow \frac{e^{-1}-e^{2n+1}}{1-e^2} \geq 10 \Leftrightarrow e^{-1} - \ e^{2n+1} \geq 10(1-e^2) \Leftrightarrow e^{2n+1} \leq 63{,}5$

=>$2n + 1 \leq ln(63{,}5)$ => $n \leq 1{,}57$

3) Soit la suite v_n définie par $\forall\ n\ \in \mathbb{N}$, $v_n = ln(u_n) = ln(e^{2n-1}) = 2n - 1$

a-Exprimons la somme $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots.. + v_n$ en fonction de n
Pour cela cherchons la nature de la suite v_n.

$v_n = ln(u_n) = ln(e^{2n-1}) = 2n - 1$ => $v_n = 2n - 1$ et $v_{n+1} = 2n + 1$

$v_{n+1} - v_n = (2n+1) - (2n-1) = 2n + 1 - 2n + 1 = 2$

Alors v_n est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = ln(u_0) = -1$.
Par conséquent l'expression de v_n est : $v_n = 2n - 1$ et la somme des n premiers termes de la suite v_n est donnée par : $S'_n = \frac{(n+1)(v_0+v_n)}{2} = \frac{(n+1)(-1+2n-1)}{2} = \frac{(n+1)(2n-2)}{2}$

$$= \frac{2(n+1)(n-1)}{2} = (n+1)(n-1) = n^2 - 1$$

D'où $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots.. + v_n = n^2 - 1$

b-Exprimons le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots.. \times u_n$ en fonction de n

On sait que : $v_n = ln(u_n)$

=> $v_0 = ln(u_0)$

$v_1 = ln(u_1)$

. .
. .
. .

$v_n = ln(u_n)$

En effectuant membre à membre la somme des termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n = ln(u_0) + ln(u_1) + \ldots.. ln(u_n) \Leftrightarrow S'_n = ln(u_0 \times u_1 \times \ldots\times u_n)$
=>$u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = e^{S'_n} \Leftrightarrow P_n = e^{S'_n}$. Or $S'_n = n^2 - 1$ =>$P_n = e^{n^2-1}$

D'où le produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots.. \times u_n$ en fonction de n est $P_n = e^{n^2-1}$

<u>Exercice 2</u>………………..……………………………………(5 *points*)

1) a-Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation : $Z^2 - (2+\sqrt{3})Z + 2 + \sqrt{3} = 0$. On notera Z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive.
$Z^2 - (2+\sqrt{3})Z + 2 + \sqrt{3} = 0$

$\Delta = \left[-(2+\sqrt{3})\right]^2 - 4(2+\sqrt{3}) = 7 + 4\sqrt{3} - 8 - 4\sqrt{3} = -1 = i^2$

=> $Z_1 = \frac{2+\sqrt{3}+i}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $Z_2 = \frac{2+\sqrt{3}-i}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

D'où S= $\left\{\frac{2+\sqrt{3}+i}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\ ;\ \frac{2+\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$

b- On considère les nombres complexes u et v tels que : $u = Z_1 + 1$ et $v = u^2 - 2$.
$u = Z_1 + 1$ => $u = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 1 = \frac{4+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$v = u^2 - 2 \Rightarrow \quad v = \left(\frac{4+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 - 2 = \frac{19+8\sqrt{3}}{4} + \frac{4+\sqrt{3}}{4}i - \frac{1}{4} - 2 = \frac{5+4\sqrt{3}}{2} + \frac{4+\sqrt{3}}{2}i$

Plaçons les points A ; B ; C et D d'affixes respectifs 1 ; Z_1 ; u et v.

$A(1\,;0)$; $B\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$; $C\left(\frac{4+\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$; $D\left(\frac{5+4\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{4+\sqrt{3}}{2}\right)$

c- Démontrons que les points A ; B et D sont alignés.

$Z_A = 1 \Rightarrow A(1\,;\,0)$
$Z_B = Z_1 \Rightarrow B\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$
$Z_D = v \Rightarrow D\left(\frac{5+4\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{4+\sqrt{3}}{2}\right)$
Démontrons que : A ; B ; C sont alignés :
A ; B ; C sont alignés si $det(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}) = 0$
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} \frac{3+4\sqrt{3}}{2} \\ \frac{4+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$
$det(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3+4\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4+\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{4+\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3}+3-3-4\sqrt{3}}{2} = 0$
Puis que $det(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}) = 0$; alors les points A ; B ; C sont alignés.

2) On considère la fonction q définie dans $\mathbb{R}$ par $q(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
a- Calculons $q(1)$ et $q(-1)$.
$q(1) = (1)^4 + (1)^3 - 7(1)^2 - (1) + 6 = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0 \Rightarrow q(1) = 0$

$q(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 7(-1)^2 - (-1) + 6 = 1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 0 \Rightarrow q(-1) = 0$
En déduisons qu'il existe un polynôme du second degré $q_1(x)$ tel que, pour tout nombre réel x, $q(x) = (x-1)(x+1) \bullet q_1(x)$.

Puisque $\begin{cases} q(1) = 0 \\ \quad et \\ q(-1) = 0 \end{cases}$ alors 1 et -1 sont des zéros de q c'est –à-dire que $q(x)$ est factorisable

par $(x-1)(x+1)$.
D'autre le degré de $(x-1)(x+1)$ est 2 et celui de $q(x)$ est 4. Alors il existe un polynôme du second degré $q_1(x)$ tel que : $q(x) = (x-1)(x+1) \bullet q_1(x)$

b- Factorisons $q(x)$
Pour cela effectuons la division euclidienne de $q(x)$ par $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 & x^2 - 1 \\ -x^4 \quad + x^2 & \\ \hline x^3 - 6x^2 - x + 6 & x^2 + x - 6 \\ -x^3 \quad + x & \\ \hline -6x^2 + 6 & \\ \ \ 6x^2 - 6 & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

$q(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + x - 6\,) = (x-1)(x+1) \bullet q_1(x)$ avec $q_1(x) = x^2 + x - 6$

ou $q(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + x - 6\,) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $q(x) = 0$.

$q(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = -3$

=> S= $\{-3\,;\,-1\,;\,1\,;2\,\}$

c- Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $6 - e^x - 7e^{2x} + e^{3x} + e^{4x} = 0$.

Posons $e^x = X$ avec $X > 0$.

Alors $6 - e^x - 7e^{2x} + e^{3x} + e^{4x} = 0 \Leftrightarrow X^4 + X^3 - 7X^2 - X + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$X = 1$ ou $X = -1$ ou $X = 2$ ou $X = -3$

- Si $X = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = ln1 = 0$
- Si $X = 2 \Leftrightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = ln2$

=> S= $\{0\,;\,ln2\}$

3) f est la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1[$ par $f(x) = \frac{x^3+3x^2-x-1}{x\ +1}$

a- Déterminons les réels a ; b ; c et d tels que pour $x \neq -1$, $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x\ +1}$

Pour cela effectuons la division euclidienne de $q(x)$ par $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$

x^3+3x^2-x-1 $-x^3-x^2$	$x+1$
$2x^2-x-1$ $-2x^2-2x$	x^2+2x-3
$-3x-1$ $3x+3$	
2	

=> $f(x) = quotient + \frac{reste}{diviseur} = x^2 + 2x - 3\ + \frac{2}{x\ +1}$

Alors par identification à $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x\ +1}$, on a :
$a = 1$; $b = 2$; $c = -3$ et $d = 2$

b- Calculons l'intégrale $I = \int_{-3}^{-2} f(x)dx$

$I = \int_{-3}^{2} f(x)dx = \int_{-3}^{2}\left(x^2 + 2x - 3\ + \frac{2}{x\ +1}\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 2ln|x+1|\right]_{-3}^{-2}$

=> $I = -\frac{8}{3} + 4 + 6 + 2ln1 + 9 - 9 - 2ln2 - 9 = -\frac{5}{3} - 2ln2$

=> $I = -\frac{5}{3} - 2ln2$

<u>Problème</u>…………………………..………..……………………(10 *points*)

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x - 5$
1) Etudions le sens de variation de g.
(On ne demande pas de Détermine les limites de g, ni de Construis sa courbe).
$g(x) = e^x + x - 5$ => $g'(x) = e^x + 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g'(x) > 0$
D'où tout $x \in \mathbb{R}$; g est strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2) a) Calculons $g(0)$ et $g(2)$
$g(0) = -4$ et $g(2) = e^2 - 3$
b) Démontrons que l'équation : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $e^x + x - 5 = 0$ admet une solution unique α et que $1{,}30 < \alpha < 1{,}31$
- D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in\ ]-\infty\ ; +\infty[$; g est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]-\infty\ ; +\infty[$; vers $]-\infty\ ; +\infty[$. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$.
- De plus $\begin{cases} g(1{,}30) = -0{,}03 \\ g(1{,}31) = 0{,}01 \end{cases}$ => $g(1{,}30) \times g(1{,}31) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $1{,}30 < \alpha < 1{,}31$.

<u>Partie B</u> :

Soit la fonction numérique f définie sur $]-\infty\,;\,5[$ par : $f(x) = ln(5 - x)$.

1) Etudions le sens de variation de f. Précisons les limites de f en 5 et en $-\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ln(5 - x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} ln(5 - x) = -\infty$$

$f(x) = ln(5 - x)$ => $f'(x) = \frac{-1}{5-x} = \frac{1}{x-5}$ => $\forall\, x \in\,]-\infty\,;\,5[\,;\;\; f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	5
$f'(x)$	$-$	$\|\|$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$-\infty$ $\|\|$

2) Prouvons que $f(\alpha) = \alpha$

D'après **Partie A 2) b)**, l'équation l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$. Alors $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} + \alpha - 5 = 0$ => $e^{\alpha} = 5 - \alpha$ => $\alpha = ln(5 - \alpha)$

D'autre part $f(x) = ln(5 - x) \Leftrightarrow f(\alpha) = ln(5 - \alpha)$. Or $\alpha = ln(5 - \alpha)$=> $f(\alpha) = \alpha$.

3) a) Démontrons que$\forall\, x \in [0\,;3]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{x-5}$

$x \in [0\,;3] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$

$\Leftrightarrow -5 \leq x - 5 \leq -2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x-5} \leq -\frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \left|-\frac{1}{5}\right| \leq |f'(x)| \leq \left|-\frac{1}{2}\right|$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ => $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ (Ce qu'il fallait Démontre)

b) En déduisons que $\forall\, x \in [0\,;3]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Puis que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a : $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$. Or $f(\alpha) = \alpha$. => $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

D'où $\forall\, x \in [0\,;3]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ (Ce qu'il fallait Démontre) .

c) Démontrons que si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$.

$0 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow f(3) \leq f(x) \leq f(0)$ (Car f est décroissante)

=> $ln2 \leq f(x) \leq ln5 \Leftrightarrow 0{,}69 \leq f(x) \leq 1{,}6O$ => $f(x) \in [0{,}69\,;1{,}6O]$.

Or $[0{,}69\,;1{,}6O] \subset [0\,;3]$. Si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$. (Ce qu'il fallait Démontre)

4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé$(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$, d'unité graphique (3 cm), on désigne son (C) la représentation graphique de la fonction f.

a-Traçons la courbe (C). Calcule puis hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées

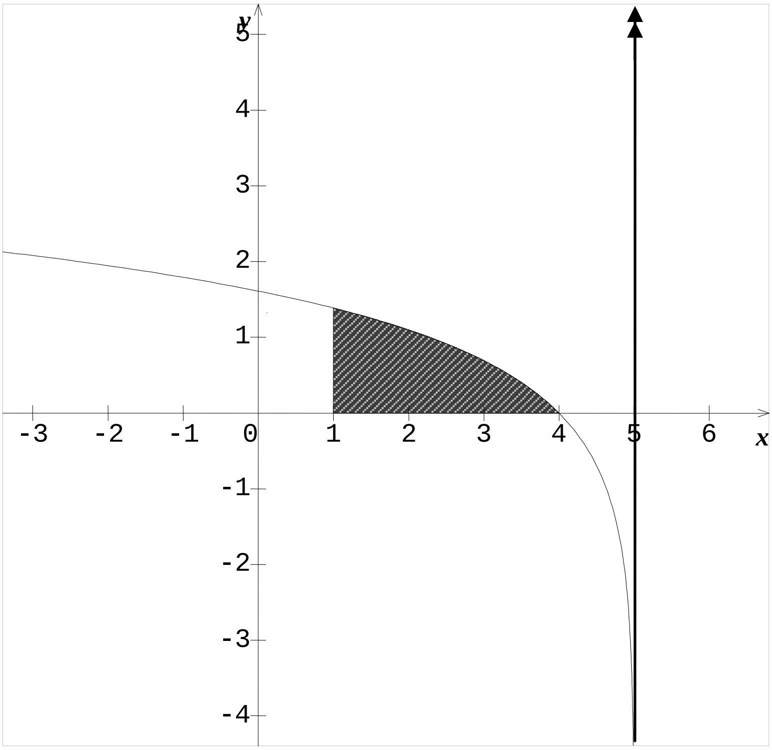
(x, y) tel que : $\begin{cases} 1 \leq x \ \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ on notera (S) cette partie.

S= $(3cm)^2 \int_1^4 f(x)\, dx = (3cm)^2 \int_1^4 ln(5 - x)\, dx.$

Or si $f(x) = ln(ax + b)$ => $F(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) ln(ax + b) - x + k$

=> S= $(3cm)^2 \int_1^4 f(x)\, dx = (3cm)^2 \int_1^4 ln\big(5 - x\big)dx = \left[\ \left(x + \frac{5}{-1}\right) ln\big(5 - x\big) - x\right]_1^4 (3cm)^2$

$= \left[\ (x - 5\ )ln\big(5 - x\big) - x\right]_1^4 (3cm)^2 = (-3 + 4ln4) \times 9\ cm^2 = 22{,}90\ cm^2$



b-En remarquant que, $\forall\ x \neq 5,\ \ \frac{x}{x-5} =\ 1 + \frac{5}{x-5}$; montrons que $\int_\alpha^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - 6\alpha$

$\int_\alpha^4 \frac{x}{x-5} dx = \int_\alpha^4 \left(\ 1 + \ \frac{5}{x-5}\right) dx = \int_\alpha^4 \left(\ 1 +\ 5\frac{1}{x-5}\right) dx = [\ x +\ 5ln|x - 5|]_\alpha^4$

$= [\ x +\ 5ln|5 - \alpha|]_\alpha^4 = (4 + 5ln1\ )- \big(\alpha + 5ln(5 - \alpha\ )\big).$

$\int_\alpha^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - \alpha - 5ln(5 - \alpha\ )$. Or $\alpha = ln(5 - \alpha\ )$

=>$\int_\alpha^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - \alpha - 5\alpha = 4 - 6\alpha$. (Ce qu'il fallait Démontre)

c-Prouvons que l'aire A de la partie (S) en cm^2 est donnée par A = $-\alpha^2 + 6\alpha - 4$.
(On utilisera une intégration par partie).

=> A= $\int_{\alpha}^{4} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{4} ln(5 - x)dx = \left[\left(x + \frac{5}{-1}\right) ln(5 - x) - x\right]_{\alpha}^{4}$

$$= \left[\,(x-5\,)ln(5 - x) - x\right]_{\alpha}^{4} = (-ln1 - 4) - \left((\alpha - 5\,)ln(5 - \alpha) - \alpha\right)$$

$= -4 - (\alpha - 5\,)ln(5 - \alpha) + \alpha$. Or $\alpha = ln(5 - \alpha\,)$

=> A= $-4 - (\alpha - 5\,)\alpha + \alpha = -4 - \alpha^2 + 5\alpha + \alpha = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$.

D'où A = $-\alpha^2 + 6\alpha - 4$. (Ce qu'il fallait Démontre)

Bac. Session de Juin 1999

Exercice 1……………………………………………………..……$(\mathbf{5}\ \boldsymbol{points})$

1) a- Linéariser : $A(x) = cos^2x + sin^3x$ et $B(x) = cos^4x$.

b- En déduis la valeur des intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} A(x)dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} B(x)dx$

2) Soit f l'application, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(Z) = Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16$

a- Détermine deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe Z, on ait :
$f(Z) = (Z^2 + 4)(Z^2 + aZ + b)$

b- En déduis l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(Z) = 0$.

c- Détermine les réels r et θ tels que $[r\ ;\ \theta] = 1 + i$.

Exercice 2……………….……………………………………………$(\mathbf{5}\ \boldsymbol{points})$

1) (u_n) est une suite géométrique de raison q =3 et de premier terme $u_1 = 2$.

a- Calcule u_n en fonction de n.

b- Calcule la somme $u_1 + u_2 + \cdots + u_7$

c-(v_n) est une suite arithmétique de raison r =3 et de premier terme $v_1 = 2$.
Exprime v_n en fonction de n puis calculé $v_{30} + v_{31} + v_{32}$

2) Résous les équations différentielles :

a- $y' + 5y = 0$.

b- $y'' + 9y = 0$.

3) a- Calcule l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx$

b- En déduis la valeur de l'intégrale $A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx$

4) Résous :

a- L'équation : $x \in \mathbb{R},\ \ 2(lnx)^2 - (lnx) - 6 = 0$

b- L'inéquation : $x \in \mathbb{R},\ \ ln(x-3) + ln(x-1) < ln(2x+3)$

Problème………………………..………..……………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

Partie A

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}{2x^2 + 2}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). Unité : 1 cm.

1) Détermine les réels a ; b et c tel que : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx}{x^2+1}$

2) a- Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition Df de la fonction f.

   b- Démontre que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ est asymptote à Cf.

   c- Etudie la position relative de Cf et de (D).

3) Calcule la dérivée f' de la fonction f puis Dresse le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4) a- Détermine les coordonnées des points de la courbe Cf où la tangente est parallèle à la droite (D).

   b- Détermine une équation de ces tangentes.

   c- Démontre que le point I$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ est centre de symétrie pour la courbe Cf.

5) Construis la courbe Cf et la droite (D) dans le même repère .

Partie B

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{5}{2}x + 2ln(x^2+1)$

1) Démontre que la fonction g est la primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

2) a- Démontre que -1 est la seule racine de $f(x)$.

b- En déduis les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

c- Calcule les limites de g lorsque x tend vers $+\infty$ puis vers $-\infty$.

3) Soit α un nombre réel avec $(\alpha \geq 0)$

a- Calcule en fonction de α, l'aire $A(\alpha)$ en cm^2 de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $0 \leq x \leq \alpha$ et $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} \leq y \leq f(x)$

b- Pour quelles valeurs de α à t-on $A(\alpha) \leq 1$?

c- Ecris 2^x sous la forme e^{kx}, avec $k \in \mathbb{R}$.

Correction Bac 1999

Exercice 1……………………………………………………..……$(\mathbf{5\ points})$

1) a- Linéarisons : $A(x) = cos^2x + sin^3x$ et $B(x) = cos^4x$.

$A(x) = cos^2x + sin^3x \Leftrightarrow A(x) = (cosx)^2 + (sinx)^3$.

Or $cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $sinx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$$=> \ A(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^2}{(2)^2} + \frac{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3}{(2i)^3}$$

$$= \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} + 2}{4} + \frac{e^{3ix} - 3e^{-3ix} - 3e^{ix}e^{-ix}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}{-8i}$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2) - \frac{1}{8i}[e^{3ix} - 3e^{-3ix} - 3e^{ix}e^{-ix}(e^{ix} - e^{-ix})]$$

$$= \frac{1}{4}(2cos2x + 2) - \frac{1}{8i}(2isin3x - 6isinx)$$

$$= \frac{2}{4}(cos2x + 1) - \frac{2i}{8i}(sin3x - 3sinx)$$

$$= \frac{1}{2}(cos2x + 1) - \frac{1}{4}(sin3x - 3sinx)$$

$$= \frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}sin3x + \frac{3}{4}sinx$$

$$=> \ A(x) = \frac{1}{2}cos2x + \frac{3}{4}sinx - \frac{1}{4}sin3x + \frac{1}{2}$$

$B(x) = cos^4x \Leftrightarrow B(x) = (cosx)^4$ .Or $cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$$=> \ B(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^4}{(2)^4} = \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} + 4e^{ix}e^{-ix}\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right)}{16}$$

$$= \frac{1}{16}[e^{4ix} + e^{-4ix} + 4e^{ix}e^{-ix}(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6]$$

$$= \frac{1}{16}(2cos4x + 8cos2x + 6)$$

$$= \frac{2}{16}(cos4x + 4cos2x + 3)$$

$$= \frac{1}{8}(cos4x + 4cos2x + 3)$$

$$=> \ B(x) = \frac{1}{8}(cos4x + 4cos2x + 3)$$

b- En déduisons la valeur des intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} A(x)dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} B(x)dx$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} A(x)dx$ => $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}cos2x + \frac{3}{4}sinx - \frac{1}{4}sin3x + \frac{1}{2}\right) dx$

=> $I = \left[\frac{1}{4}sin2x - \frac{3}{4}cosx + \frac{1}{12}cos3x + \frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{3\sqrt{3}-11+6\pi}{24}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}+5+6\pi}{24}$

=> $I = \frac{3\sqrt{3}+5+6\pi}{24}$

$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} B(x)dx$ => $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{8}(cos4x + 4cos2x + 3)dx = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(cos4x + 4cos2x + 3)dx$

=> $J = \left[\frac{1}{4}sin4x + 2sin2x + 3x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{8+3\pi}{4}\right) - (0) = \frac{8+3\pi}{4}$

2) Soit f l'application, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(Z) = Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16$
a- Déterminons les réels a et b tels que pour tout nombre complexe Z, on ait :
$f(Z) = (Z^2 + 4)(Z^2 + aZ + b)$

$f(Z) = (Z^2 + 4)(Z^2 + aZ + b) \Leftrightarrow f(Z) = Z^4 + aZ^3 + Z^2(b+4) + 4aZ + 4b$

Par identification à $f(Z) = Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16$, on a :

$\begin{cases} a = -\sqrt{2} \\ b + 4 = 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} a = -\sqrt{2} \\ b = -4 \end{cases}$ => $f(Z) = (Z^2 + 4)\left(Z^2 - \sqrt{2}Z - 4\right)$

b- En déduisons l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(Z) = 0$.
$f(Z) = 0 \Leftrightarrow (Z^2 + 4)\left(Z^2 - \sqrt{2}Z - 4\right) = 0$ => $Z^2 + 4 = 0$ ou $Z^2 - \sqrt{2}Z - 4 = 0$

$Z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow Z^2 = -4 \Leftrightarrow Z^2 = 4i^2$ => $Z = -2i$ ou $Z = 2i$

$Z^2 - \sqrt{2}Z - 4 = 0$ => $\Delta = 18$. Donc $Z = -\sqrt{2}$ ou $Z = 2\sqrt{2}$
S= $\left\{-2i\,;2i\,;-\sqrt{2}\,;\,2\sqrt{2}\right\}$

c- Déterminons les réels r et θ tels que $[r\,;\,\theta] = 1 + i$.

$[r\,;\,\theta] = 1 + i \Leftrightarrow [r\,;\,\theta] = \left[\sqrt{2}\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ => $\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \quad et \\ \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

<u>Exercice 2</u>……………….………………………………………….($\boldsymbol{5\ points}$)

1) (u_n) est une suite géométrique de raison q =3 et de premier terme $u_1 = 2$.
a- Calculons u_n en fonction de n.
L'expression de la suite géométrique u_n de premier terme u_1 et de raison q est :
$u_n = u_1(q)^{n-1}$
=> $u_n = 2(3)^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$

b- Calculons la somme $u_1 + u_2 + \cdots + u_7$
Ici il s'agit de Calcule la somme des 7 premiers termes de la suite géométrique u_n
La somme des n premiers termes de la suite géométrique u_n de premier terme u_1 et de raison q est : $S_n = \frac{u_1[1-(q)^n]}{1-q}$. Or q =3 et $u_1 = 2$
=> $S_n = \frac{2[1-(3)^n]}{1-3} = \frac{2[1-(3)^n]}{-2} = -[1-(3)^n] = 3^n - 1$

Donc la somme des 7 premiers termes de la suite géométrique u_n est $S_7 = 3^7 - 1 = 2186$.

c-(v_n) est une suite arithmétique de raison r =3 et de premier terme $v_1 = 2$.
Exprimons v_n en fonction de n
L'expression de la suite arithmétique v_n de raison r et de premier terme v_1 est :
$v_n = v_1 + r(n-1)$. Or r =3 et $v_1 = 2$

=> $v_n = 2 + 3(n-1) = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$

Calculons $v_{30} + v_{31} + v_{32}$

$v_{30} + v_{31} + v_{32} = \frac{3(v_{30} + v_{32})}{2} = \frac{3}{2}(v_{30} + v_{32}) = \frac{3}{2}(3 \times 30 - 1 + 3 \times 32 - 1) = 276$

2) Résolvons les équations différentielles :
a- $y' + 5y = 0$
b- $y'' + 9y = 0$

Rappel :

Equations différentielles	Solutions
$y' - ay = 0$	$y(x) = ke^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$
$y'' + w^2y = 0$	$y(x) = k_1 coswx + k_2 sinwx$ avec $(k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2$

a- $y' + 5y = 0 \Leftrightarrow y' - (-5)y = 0$ => $y(x) = ke^{-5x}$ avec $k \in \mathbb{R}$

b- $y'' + 9y = 0 \Leftrightarrow y'' + 3^2y = 0$ =>$(x) = k_1 cos3x + k_2 sin3x$ avec $(k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2$

3) a- Calculons l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx$ => $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx = \left[\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{1}{2}sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}sin0\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

b- En déduisons valeur de l'intégrale $A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx$

$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

4) Résolvons :
a- L'équation : $x \in \mathbb{R}$, $2(lnx)^2 - (lnx) - 6 = 0$
$2(lnx)^2 - (lnx) - 6 = 0$. Posons $X = lnx$ => $2X^2 - X - 6 = 0$. $\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-6)$
=> $\Delta = 49$. $X_1 = -\frac{3}{2}$; $X_1 = 2$
- Si $X = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow lnx = -\frac{3}{2}$ => $x = e^{-\frac{3}{2}}$

- Si $X = 2 \Leftrightarrow lnx = 2 \Rightarrow x = e^2$

$\Rightarrow$ S= $\left\{e^{-\frac{3}{2}} ; e^2\right\}$

b- L'inéquation : $x \in \mathbb{R}$, $ln(x-3) + ln(x-1) < ln(2x+3)$

$ln(x-3) + ln(x-1) < ln(2x+3) \Leftrightarrow ln[(x-3)(x-1)] < ln(2x+3) \Leftrightarrow$

$(x-3)(x-1) < (2x+3) \Leftrightarrow x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow x(x-6) < 0$. Posons $x(x-6) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 6$. Ainsi on a le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	0		6	$-\infty$
$x^2 - 6x$	+	0		0	+

D'après le tableau de signe, l'ensemble solution de l'inéquation :
$ln(x-3) + ln(x-1) < ln(2x+3)$ est S= $]0 ; 6[\cap]3 ; +\infty[=]3 ; 6[$

<u>Problème</u>…………………………..………..……………………(10 *points*)

<u>Partie A</u>

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}{2x^2 + 2}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). Unité : 1 cm.

1) Déterminons les réels a ; b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2+1}$

En effectuant la division Euclidienne $(x^3 + 5x^2 + 9x + 5)$ par ($2x^2 + 2$), on obtient :

$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{8x}{2x^2+2} = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{4x}{x^2+1}$ et par identification avec

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$, on a : $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{5}{2}$ et $c = 4$

2) a- Calculons les limites aux bornes de l'ensemble de définition Df de la fonction f.

Df $= \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}{2x^2 + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}{2x^2 + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$$

b- Démontrons que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ est asymptote à Cf.

La droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe Cf si :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - y = 0.$$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - y = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{4x}{x^2+1}\right) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{4}{x} = 0$

D'où la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ est asymptote oblique à la courbe Cf .

c- Etudions la position relative de Cf et de (D).

Pour ce la étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{x^2+1} = 0$. Le signe de $f(x) - y$ depend du signe de $4x$, car $x^2 + 1 > 0$ Posons $4x = 0 \Rightarrow x = 0$

D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe de $f(x) - y$, on a :

$\forall x \in]-\infty\,;\,0[\,,\ f(x) - y < 0$. Alors $\forall x \in]-\infty\,;\,0[$, (C) est en dessous de (D).

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,,\ f(x) - y > 0$. Alors $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, (C) est au dessus de (D).

3) Calculons la dérivée f' de la fonction f puis Dresse le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Posons $u = x^3 + 5x^2 + 9x + 5 \Rightarrow u' = 3x^2 + 10x + 9$

et $v = 2x^2 + 2 \Rightarrow v' = 4x$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{u' \times v - v' \times u}{(v)^2} = \frac{(3x^2+10x+9)(2x^2+2) - (4x)(x^3+5x^2+9x+5)}{(2x^2+2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2-3)^2}{2(x^2+1)^2}$

Pour tout $x \in D_f$, $f'(x) > 0$. Alors $\forall x \in D_f$, f est strictement croissante.

D'où le tableau de variation de f est le suivant:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) a- Déterminons les coordonnées des points de la courbe Cf où la tangente est parallèle à la droite (D).

La tangente (T) a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

La droite (D) a pour équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

La tangente (T) est parallèle à la droite (D) si et seulement si :

$f'(x_0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{(x_0{}^2-3)^2}{2(x_0{}^2+1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{(x_0{}^2-3)^2}{(x_0{}^2+1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x_0{}^2 - 3)^2 = (x_0{}^2 + 1)^2$

$\Leftrightarrow (x_0{}^2 - 3)^2 - (x_0{}^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow [(x_0{}^2 - 3) - (x_0{}^2 + 1)][(x_0{}^2 - 3) + (x_0{}^2 + 1)] = 0$

$\Leftrightarrow \left(x_0{}^2 - 3 - x_0{}^2 - 1\right)(x_0{}^2 - 3 + x_0{}^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow -4\left(2x_0{}^2 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow 2x_0{}^2 - 2 = 0$

⇔ $x_0{}^2 = 1$ => $x_0 = -1$ ou $x_0 = 1$

- Si $x_0 = -1$ alors $y_0 = f(-1) = 0$ => $A\binom{-1}{0}$
- Si $x_0 = 1$ alors $y_0 = f(1) = 0$ => $B\binom{1}{5}$

D'où les points cherchés sont $A\binom{-1}{0}$ et $B\binom{1}{5}$

b- Déterminons une équation de ces tangentes.

- Equation de la tangente au point $A\binom{-1}{0}$: $y = y = \frac{1}{2}(x-1)+5 = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$
- Equation de la tangente au point $B\binom{1}{5}$: $y = y = \frac{1}{2}(x+1)+0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

c- Démontrons que le point $\mathrm{I}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ est centre de symétrie pour la courbe Cf.

Le point $\mathrm{I}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ est dit centre de symétrie si $f(2(0) - x) + f(x) = 2\left(\frac{5}{2}\right)$

⇔$f(-x) + f(x) = 5$

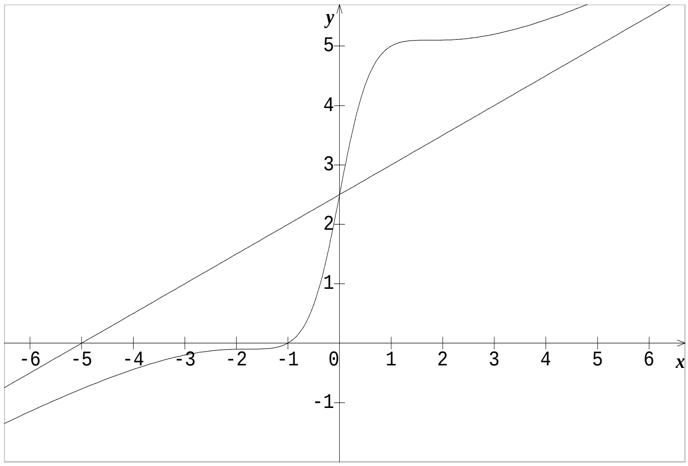
$f(-x) = \frac{-x^3+5x^2-9x+5}{2x^2+2}$

=>$f(-x) + f(x) = \frac{-x^3+5x^2-9x+5}{2x^2+2} + \frac{x^3+5x^2+9x+5}{2x^2+2} = \frac{-x^3+5x^2-9x+5+x^3+5x^2+9x+5}{2x^2+2}$

=>$f(-x) + f(x) = \frac{10x^2+10}{2x^2+2} = \frac{5(2x^2+2)}{2x^2+2} = 5$

Puisque $f(-x) + f(x) = 5$ alors $\mathrm{I}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ est un centre de symétrie pour la courbe (C)

5) Construisons la courbe Cf et la droite (D) dans le même repère .



Partie B

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{2}x + 2ln(x^2 + 1)$

1) Démontrons que la fonction g est la primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
g est une primitive de f si et seulement si $g^{'}(x) = f(x)$

$g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{2}x + 2ln(x^2 + 1) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{4x}{x^2+1} = \frac{x^3 + 5x^2 + 9x + 5}{2x^2 + 2} = f(x)$

2) a- Démontre que -1 est la seule racine de $f(x)$.

$f(-1) = \frac{-1 + 5 - 9 + 5}{2 + 2} = 0 \Rightarrow -1$ est une racine de $f(x)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x^2 + 2x + 5)}{2x^2 + 2} = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + 2x + 5) = 0$

$\Rightarrow x + 1 = 0$ ou $x^2 + 2x + 5 = 0$

$\Rightarrow x = -1$ ou $x^2 + 2x + 5 = 0$. $\Delta = -4 < 0$

D'où -1 est la seule racine de $f(x)$.

b- En déduisons les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Puisque $g'(x) = f(x)$ alors $g'(x)$ à le même signe que $f(x)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe de g', on a :

$\forall x \in]-\infty\,;\, -1]$, $g'(x) < 0$. Alors $\forall x \in]-\infty\,;\, -1]$, g est décroissante

$\forall x \in [-1\,;\, +\infty[$, $g'(x) > 0$. Alors $\forall x \in [-1\,;\, +\infty[$, g est croissante

c- Calculons les limites de g lorsque x tend vers $+\infty$ puis vers $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3) Soit α un nombre réel avec $(\alpha \geq 0)$

a- Calculons en fonction de α, l'aire $A(\alpha)$ en cm^2 de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $0 \leq x \leq \alpha$ et $\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \leq y \leq f(x)$

$A(\alpha) = (1\,cm)^2 \int_0^\alpha \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)\right] dx = 1cm^2 \int_0^\alpha \frac{4x}{x^2 + 1} dx = 2cm^2 [ln(\alpha^2 + 1)]_0^\alpha$

$= \ 2ln(\alpha^2 + \ 1) \times 1cm^2$

=> $A(\alpha) = 2ln(\alpha^2 + \ 1)cm^2$

b- Déterminons les valeurs de α pour les quelles on a : $A(\alpha) \leq 1$

$A(\alpha) \leq 1 \ \Leftrightarrow 2ln(\alpha^2 + \ 1) \leq 1 \ \ \Leftrightarrow \alpha \leq \sqrt{e^{\frac{1}{2}} - 1} \ \ \Leftrightarrow \alpha \leq 0{,}80$

D'où pour $\alpha \in]-\infty \,; 0{,}80\,]$, on a : $A(\alpha) \leq 1$

c- Ecrivons 2^x sous la forme e^{kx}, avec $k \in \mathbb{R}$.

On sait que pour $a > 0$, on a $a^x = e^{xlna}$

=> $2^x = e^{xln\,2}$

Bac. Session de Juin 2000

Exercice 1………………………………………………………..……**(5 *points*)**

1) a- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^3-(1-i)Z^2+Z-1+i=0$ sachant qu'elle admet des solutions imaginaires pures.

b- Dans le plan complexe (P), les solutions Z_1 ; Z_2 et Z_3 de l'équation proposée ont pour images respectives les points A ; B et C. Place ces points dans (P).

c- Détermine le nombre complexe Z_4 dont l'image est le point D, quatrième sommet du parallélogramme $ADCB$.

2) Ecris la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes Z_1 ; Z_2 et Z_3.

3) a- Calcule $(2+i)^2$

b- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $iZ^2-iZ-1+i=0$

Exercice 2……………….……………………………………….**(5 *points*)**

1) Soit le polynôme p définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $p(x)=x^3-4x^2-29x-24$.

a- Vérifie que $p(8)=0$.

b- Ecris $p(x)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.

c- En déduis la résolution de l'inéquation : $(x\in\mathbb{R}), p(x)\leq 0$.

2) En utilisant les résultats de la question 1), Résous dans $\mathbb{R}$:

a- L'équation : $(ln\,x)^3-4(ln\,x)^2-29ln\,x-24=0$.

b- L'inéquation : $(ln\,x)^3-4(ln\,x)^2-29ln\,x-24\leq 0$.

c- L'équation : $2^{3x}-4\times 2^{2x}-29\times 2^x-24=0$.

3) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur $D=\mathbb{R}-\left\{-2;\frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x)=\dfrac{9x^2+14x-1}{3x^2+5x-2}$.

a- Vérifie que $\forall x\in D$, on a : $f(x)=3-\frac{1}{x+2}+\frac{2}{3x-1}$.

b- En déduis l'ensemble des primitives de f sur D.

4) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}\end{cases}$

a- On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de terme général : $v_n=\dfrac{1}{u_n}$

Prouve que la suite(v_n) est une suite arithmétique.

b- En déduis v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

c- Détermine le comportement de la suite (u_n) à l'infinie.

d- Pour quelle valeur de x a-t-on, $e^{ln(x+1)}\times e^{-ln(2-x)}=u_0$?

Problème………………………..………..……………………**(10 *points*)**

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+1}$. (C) désigne sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère d'un orthonormal $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

1) Détermine les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) a- Prouve que la droite (Δ_1) d'équation $y=x+2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$

b- Précise la position de (C) par rapport à (Δ_1)

3) a- Justifie que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x)=x-2+\frac{4}{e^x+1}$

b- En déduis que la droite (Δ_2) d'équation $y=x-2$ est une asymptote à (C) en $+\infty$

c- Précise la position de (C) par rapport à (Δ_2)

4) a- Prouve que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$

b- Étudie le signe de $f'(x)$. En déduis le sens de variation de f. Dresse le tableau de variation de f.

5) Trace les droites (Δ_1) et (Δ_2) puis la courbe (C) en précisant sa tangente au point d'abscisse nulle.

6) Détermine l'ensemble des primitives de f sur de $\mathbb{R}$.

Correction Bac 2000

Exercice 1…………………………………………………………..……$(\mathbf{5\ points})$

1) a- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^3-(1-i)Z^2+Z-1+i=0$ sachant qu'elle admet des solutions imaginaires pures.

Soit $Z_0= ib$ cette solution imaginaire telle que : ${Z_0}^3-(1-i){Z_0}^2+Z_0-1+i=0$

$\Leftrightarrow (ib)^3-(1-i)(ib)^2+(ib)-1+i=0 \Leftrightarrow -ib^3+b^2(1-i)+ib-1+i=0$

$\Leftrightarrow -ib^3+b^2-ib^2+ib-1+i=0 \Leftrightarrow (b^2-1)+i(-b^3-b^2+b+1)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2-1=0 & (1) \\ -b^3-b^2+b+1=0 & (2) \end{cases}$

NB : On résous toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation **(1)** qui est la plus facile à Résous :

$b^2-1=0 \Rightarrow b=1$ ou $b=-1$

Et par vérification dans **(2)**, on remarque que : $b=1$ et $b=-1$ sont solution

D'où $Z_0= i$ et $Z_0'=-i$ sont les solutions imaginaires de l'équation :

$Z^3-(1-i)Z^2+Z-1+i=0$

b- Dans le plan complexe (P), les solutions Z_1 ; Z_2 et Z_3 de l'équation proposée ont pour images respectives les points A ; B et C.

i et $-i$ étant des solutions de l'équation : $Z^3-(1-i)Z^2+Z-1+i=0$, on a :

$Z^3-(1-i)Z^2+Z-1+i=(aZ+b)(Z-i)(Z+i)=(aZ+b)(Z^2+1)$
$=aZ^3+bZ^2+aZ+b$

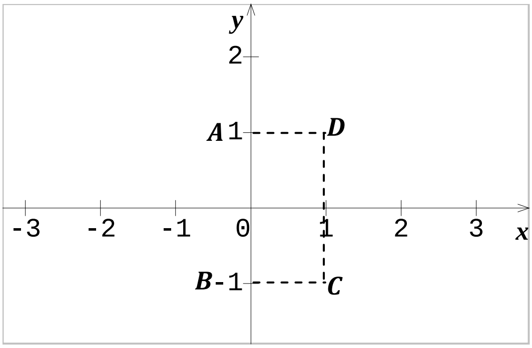
Par identification on a : $\begin{cases} a=1 \\ b=-1+i \end{cases}$

$\Rightarrow Z^3-(1-i)Z^2+Z-1+i=(Z-1+i)(Z-i)(Z+i)$

D'où $Z^3-(1-i)Z^2+Z-1+i=0 \Leftrightarrow (Z-1+i)(Z-i)(Z+i)=0$

$\Leftrightarrow Z_1=i$ *ou* $Z_2=-i$ *ou* $Z_3=1-i \Rightarrow$ S= $\{i\ ;\ -i\ ;1-i\}$

Plaçons ces points dans (P).



c- Déterminons le nombre complexe Z_4 dont l'image est le point D, quatrième sommet du parallélogramme $ABCD$.

$ADCB$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\Leftrightarrow Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$ avec :

$Z_A = Z_1 = i$; $Z_B = Z_2 = -i$; $Z_C = Z_3 = 1 - i$ et $Z_D = Z_4$

Donc $Z_B - Z_A = Z_C - Z_D \Leftrightarrow Z_D = Z_C + Z_A - Z_B \Leftrightarrow Z_D = (1 - i) + (i) - (-i)$

$\Leftrightarrow Z_D = 1 - i + i + i = 1 + i$ => $Z_D = 1 + i$

2) Ecrivons la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes Z_1 ; Z_2 et Z_3.
$Z_1 = i$ => $|Z_1| = 1$ et $arg(Z_1) = \frac{\pi}{2}$ Alors $Z_1 = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$Z_2 = -i$ => $|Z_2| = 1$ et $arg(Z_2) = -\frac{\pi}{2}$ Alors $Z_2 = cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
$Z_3 = 1 - i$ => $|Z_3| = \sqrt{2}$ et $arg(Z_3) = -\frac{\pi}{4}$ Alors $Z_3 = cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

3) a- Calculons $(2 + i)^2$

$(2 + i)^2 = (2)^2 + 2(2)(i) + (i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$ => $(2 + i)^2 = 3 + 4i$

b- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $iZ^2 - iZ - 1 + i = 0$

$iZ^2 - iZ - 1 + i = 0$ => $\Delta = (-i)^2 - 4(i)(-1 + i) = 3 + 4i = (2 + i)^2$

=> $Z_1 = \frac{i - \sqrt{(2+i)^2}}{2i} = \frac{i - (2+i)}{2i} = \frac{i - 2 - i}{2i} = \frac{-2}{2i} = \frac{-1}{i} = -1(-i) = i$

$Z_2 = \frac{i + \sqrt{(2+i)^2}}{2i} = \frac{i + (2+i)}{2i} = \frac{i + 2 + i}{2i} = \frac{2 + 2i}{2i} = \frac{1 + i}{i} = (1 + i)(-i) = 1 - i$

=> S= $\{i \; ; \; 1 - i\}$

<u>Exercice 2</u>……………….……………………………………………$(\mathbf{5}\ \boldsymbol{points})$

1) Soit le polynôme p définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $p(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24$.
a- Vérifions que $p(8) = 0$.
$p(8) = (8)^3 - 4(8)^2 - 29(8) - 24 = 0$

b- Ecrivons $p(x)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.

	1	-4	-29	-24
8		8	32	24
	1	4	3	0

x_0 $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{c}$

$P(x) = (x - x_0)(ax^2 + bx + c) = (x - 8)(x^2 + 4x + 3)$

c- En déduisons la résolution de l'inéquation : $(x \in \mathbb{R}), p(x) \leq 0$.

Posons $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-8)(x^2+4x+3) = 0$

⇨ $x - 8 = 0$ ou $x^2 + 4x + 3 = 0$

⇨ $x_0 = 8$ ou $x_1 = -1$ ou $x_2 = \frac{-c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$

Ainsi on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$ -3		-1	8 $+\infty$
$x-8$	$-$		$-$	0
x^2+4x+3	$+$ 0	0	$+$	
$P(x)$	$-$ 0	0	$-$	0

D'après le tableau de signe on a : $S =]-\infty\ ;\ -3] \cup [-1\ ;8]$

2) En utilisant les résultats de la question 1), résolvons dans $\mathbb{R}$:
a- L'équation : $(ln\ x)^3 - 4(ln\ x)^2 - 29ln\ x - 24 = 0$.

Posons $X = lnx$. L'équation $(ln\ x)^3 - 4(ln\ x)^2 - 29ln\ x - 24 = 0$:

$X^3 - 4X^2 - 29X - 24 = 0 \Leftrightarrow (X-8)(X^2+4X+3) = 0$

=> $X = 8$ ou $X = -1$ ou $X = -3$

- Si $X = 8 \Leftrightarrow lnx = 8 \Rightarrow x = e^8$.
- Si $X = -1 \Leftrightarrow lnx = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$.
- Si $X = -3 \Leftrightarrow lnx = -3 \Rightarrow x = e^{-3}$.

Alors $S = \{e^8\ ;\ e^{-1}\ ;\ e^{-3}\}$

b- L'inéquation : $(ln\ x)^3 - 4(ln\ x)^2 - 29ln\ x - 24 \leq 0$.

En utilisant la question **1) ; c),** on a : S= $]-\infty\ ;\ e^{-3}] \cup [e^{-1}\ ;e^8]$

c- L'équation : $2^{3x} - 4 \times 2^{2x} - 29 \times 2^x - 24 = 0$.

D'après **1) ;** on a : $X = -1$; $X = -3$ ou $X = 8$

- Si $X = -1 \Leftrightarrow 2^x = -1 \Leftrightarrow e^{xln\,2} = -1$ impossible

- Si $X = -3 \Leftrightarrow 2^x = -3 \Leftrightarrow e^{xln\,2} = -3$ impossible

- Si $X = 8 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow e^{xln\,2} = 8 \Rightarrow xln2 = ln8 \Leftrightarrow xln2 = ln2^3 \Leftrightarrow xln2 = 3ln2$

=> $x = 3$ .Alors $S = \{3\}$

3) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur $D = \mathbb{R} - \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x) = \frac{9x^2 + 14x - 1}{3x^2 + 5x - 2}$.

a- Vérifions que $\forall x \in D$, on a : $f(x) = 3 - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{3x-1}$

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{3x-1} = \frac{3(x+2)(3x-1) - (3x-1) + 2(x+2)}{(x+2)(3x-1)} = \frac{9x^2 + 14x - 1}{3x^2 + 5x - 2}$$

D'où $\forall x \in D$, on a : $f(x) = 3 - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{3x-1}$

b- En déduisons l'ensemble des primitives de f sur D.

On a : $f(x) = 3 - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{3x-1}$ => $F(x) = 3x - ln|x+2| + \frac{2}{3} ln|3x-1| + k$

4) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n} \end{cases}$

a- On introduit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de terme général : $v_n = \frac{1}{u_n}$

Prouvons que la suite (v_n) est une suite arithmétique.

(v_n) est une suite arithmétique si et seulement si $v_{n+1} - v_n = r = cste$

$$v_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{1 + u_n}} = \frac{1 + u_n}{u_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1 + u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{1 + u_n - 1}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} = 1$$

D'où (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{3}$

b- En déduisons v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

v_n étant une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$, alors son expression en fonction de n est : $v_n = v_0 + nr = \frac{1}{3} + n \times 1 = n + \frac{1}{3}$

D'autre part on a : $v_n = \frac{1}{u_n}$ => $u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{n + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3n+1}{3}} = \frac{3}{3n+1}$

c- Déterminons le comportement de la suite (u_n) à l'infinie.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{3n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{3n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

d- Déterminons la valeur de x pour la quelle on a : $e^{ln(x+1)} \times e^{-ln(2-x)} = u_0$

$$e^{ln(x+1)} \times e^{-ln(2-x)} = u_0 \Leftrightarrow e^{ln(x+1) - ln(2-x)} = 3 \Leftrightarrow e^{ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)} = 3 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2-x} = 3$$

$x + 1 = 3(2 - x) \Leftrightarrow 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

<u>Problème</u>……………………………………………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+1}$. (C) désigne sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère d'un orthonormal $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

1) Déterminons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+1} = -\infty$$

2) a- Prouvons que la droite (Δ_1) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - y = \lim_{x \to -\infty} \left(x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+1}\right) - (x+2) = -\infty = \lim_{x \to -\infty} x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+1} - x + 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} -\frac{4e^x}{e^x+1} = 0$$

Alors la droite (Δ_1) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$

b- Précisons la position de (C) par rapport à (Δ_1)

Pour ce la étudions le signe de $f(x) - y$.

$f(x) - y = -\frac{4e^x}{e^x+1} < 0$.

$\forall x \in]-\infty\,;+\infty[$, $f(x) - y < 0$. Alors $\forall x \in]-\infty\,;+\infty[$, (C) est en dessous de (Δ_1).

3) a- Justifions que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^x+1}$

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+1} = (x-2) - (x-2) + x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+1}$$

$$= (x-2) - x + 2 + x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+1} = (x-2) + 4 - \frac{4e^x}{e^x+1}$$

$$= x - 2 + \frac{4(e^x+1) - 4e^x}{e^x+1} = x - 2 + \frac{4e^x + 4 - 4e^x}{e^x+1} = x - 2 + \frac{4}{e^x+1}$$

D'où pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = x - 2 + \frac{4}{e^x+1}$

b- En déduisons que la droite (Δ_2) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à (C) en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y \ = \lim_{x \to +\infty} \left(x - 2 + \frac{4}{e^x + 1}\right) - (x - 2) = -\infty = \lim_{x \to +\infty} x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} - x + 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{e^x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{e^x} = 0$$

Alors la droite (Δ_2) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à (C) en $+\infty$

c- Précisons la position de (C) par rapport à (Δ_2)

Pour cela étudions le signe de $f(x) - y$

$$f(x) - y = x - 2 + \frac{4}{e^x + 1} - (x - 2) = \frac{4}{e^x + 1} > 0$$

Donc (C) est au dessus de (Δ_2) en $+\infty$.

4) a- Prouvons que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1} \Rightarrow f'(x) = 1 - 4\frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

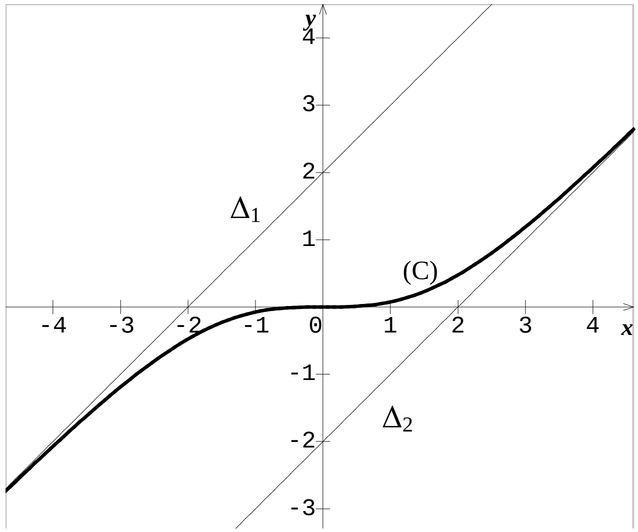
b- Étudions le signe de $f'(x)$.

De ce qui précède, $\forall x \in Df,\ f'(x) \geq 0$ et par conséquent f est croissante.

Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$				$+\infty$

5) Traçons les droites (Δ_1) et (Δ_2) puis la courbe (C) en précisant sa tangente au point d'abscisse nulle.



6) Déterminons l'ensemble des primitives de f sur de $\mathbb{R}$.

$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1}$ => $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 4ln(e^x + 1) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Bac. Session de Juin 2001

Exercice 1……………………………………………………..……($5\ points$)

1) Calcule les intégrales suivantes :

a) $\int_2^3 \frac{x+1}{x-1}dx$; b) $\int_0^1 (x^3+2x^2+x+2)\,dx$; c) $\int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x+2}\,dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^4 x - 3sinx \times cosx)\,dx$

2) a-Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - 8Z + 25 = 0$.

b) Calcule $(1+2i)^4$.

c) Détermine et représente les racines quatrièmes du nombre complexe $Z = -7 - 24i$.

Les racines quatrièmes de l'unité sont : 1 ; -1 ; i ; $-i$.

Exercice 2………………..…………………………………………($5\ points$)

1) Résous les systèmes :

a- $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $\begin{cases} 5e^x + e^y = 4 \\ 4e^x - 6e^y = -7 \end{cases}$; b- $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $\begin{cases} (lnx)(lny) = -10 \\ lnx + lny = 3 \end{cases}$

c- $\begin{cases} 2lnx - lny = 0 \\ 4lnx + lny = 3 \end{cases}$

2) a- Donne la solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 0$.

b- Détermine la solution particulière f de (E) telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$

c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$.

Problème………………………..………..……………………($10\ points$)

f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{1+2lnx}{x^2}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

On désigne par (C) et (H) les courbes représentatives de f et g dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité $4cm$

Partie A

1) a- Prouve que $f'(x)$ est du signe de $-4lnx$ sur $]0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$

b- Dresse le tableau de variations de f.

c- Précise les droites asymptotes à (C)

2) Etudie la position de (C)par rapport à l'axe des abscisses et donnez une équation de la tangente à (C)au point d'intersection de (C)avec l'axe des abscisses.

3) Calcule l'intégrale $\int_1^2 g(t)dt$

4) Construis (C)et $(\boldsymbol{H})$

<u>Partie B</u>

1) Démontre que la position relative de (C)et $(\boldsymbol{H})$ peut se déduire du signe de $h(x) = 1 + 2lnx - x$.

2) En utilisant les variations de la fonction h, Prouve que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0\,;\ 2[$.

Calcule $h(1)$ puis montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β dans l'intervalle $]2\,;\ +\infty[$ dont on précisera la valeur. Justifie l'encadrement $3 < \beta < 4$

3) Précise le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x et conclure sur la position relative des courbes (C)et $(\boldsymbol{H})$.

4) Calcule l'intégrale : $I(\alpha) = ln \int_{\alpha}^{ln2} (-4e^{2x} + 8e^{x})\, dx$ où α est un réel strictement inférieur à $ln2$.

Correction Bac 2001

Exercice 1……………………………………………………...……(5 points)

1) Calculons les intégrales suivantes :

a) $\int_2^3 \frac{x+1}{x-1}dx = \int_2^3 \left(1+\frac{2}{x-1}\right)dx = [x+2ln|x-1|]_2^3 = (3+2ln2)-(2+2ln1)$

$$= 1+2ln2$$

b) $\int_0^1 (x^3+2x^2+x+2)\,dx = \left[\frac{1}{4}\,x^4+\frac{2}{3}\,x^2+\frac{1}{2}\,x^2+2x\right]_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+2 = \frac{41}{12}$

c) $\int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x+2}\,dx = \left[e^{x^2+x+2}\right]_0^1 = e^8-e^2$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^4x - 3sinx\times cosx)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4x\,dx - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\times cosx\,dx$

On sait que la forme linéarisée de cos^4x est $cos^4x = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}cos2x+\frac{1}{8}cos4x$

=> $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}cos2x+\frac{1}{8}cos4x\right)dx - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\times cosx\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}(3+4cos2x+cos4x)\,dx - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\times cosx\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[3x+2sin2x+\frac{1}{4}sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\left[\frac{1}{2}\,sin^2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}sin2x+\frac{1}{32}sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{3}{2}\,sin^2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\frac{3}{2} = \frac{3\pi-24}{2}$$

2) a-Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2-8Z+25=0$.

$Z^2-8Z+25=0$ => $\Delta = 36i^2$. Alors on a : $Z_1 = 4-3i$ et $Z_2 = 4+3i$

=> S= $\{4-3i\,;\,4+3i\}$

b) Calculons $(1+2i)^4$.

$(1+2i)^4 = (1)^4+4(1)^3(2i)+6(1)^2(2i)^2+4(1)^1(2i)^3+(2i)^4 = -7-24i$

c) Déterminons et représente les racines quatrièmes du nombre complexe $Z=-7-24i$.

Soit z une racine 4ième de $-7-24i$. On a :

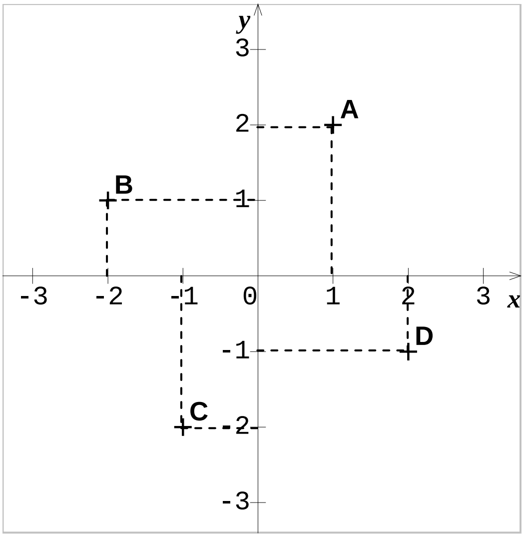
$z^4 = -7-24i \Leftrightarrow z^4 = (1+2i)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{1+2i}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{1+2i}$ est une racine quatrième de l'unité.

Alors on a :

- $\frac{z}{1+2i} = 1 \Leftrightarrow z = 1(1+2i) = 1+2i$
- $\frac{z}{1+2i} = -1 \Leftrightarrow z = -1(1+2i) = -1-2i$
- $\frac{z}{1+2i} = i \Leftrightarrow z = i(1+2i) = i + 2i^2 = -2+i$
- $\frac{z}{1+2i} = -i \Leftrightarrow z = -i(1+2i) = -i - 2i^2 = 2-i$

Donc les racines quatrièmes du nombre complexe $-7-24i$ sont :

$1+2i$; $-1-2i$; $-2+i$; $2-i$.



<u>Exercice 2</u>……………………………………………………………$(5\ \boldsymbol{points})$

1) Résolvons les systèmes :

a- $(x;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$: $\begin{cases} 5e^x + e^y = 4 \\ 4e^x - 6e^y = -7 \end{cases}$

$\begin{cases} 5e^x + e^y = 4 \\ 4e^x - 6e^y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30e^x + 6e^y = 24 \\ 4e^x - 6e^y = -7 \end{cases}$

=> $34e^x = 17$ => $e^x = \frac{1}{2}$ et $x = ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln2$

Remplaçons $x = -ln2$ par sa valeur dans l'équation $5e^x + e^y = 4$. Ainsi on a :

$5e^{-ln2} + e^y = 4 \Leftrightarrow \frac{5}{2} + e^y = 4 \Leftrightarrow e^y = \frac{3}{2}$ et $y = ln\left(\frac{3}{2}\right)$

D'où $S = \left\{\left(-ln2\,; ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)\ ;\ \left(ln\left(\frac{3}{2}\right)\,; -ln2\right)\right\}$

b- $\begin{cases} lnx \times lny = -10 \\ lnx + lny = 3 \end{cases}$ Posons $lnx = X$ et $lny = Y$ => $\begin{cases} X \times Y = -10 \\ X + Y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = -10 \\ S = 3 \end{cases}$

Ce système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = 3$ et $P = -10$
Alors résolvons l'équation : $X^2 - 3X - 10 = 0$ => $\Delta = 49$. Donc $X_1 = 5$ et $X_2 = -2$

- Si $X_1 = 5 \Leftrightarrow lnx = 5$ => $x = e^5$
- Si $X_1 = -2 \Leftrightarrow lnx = -2$ => $x = e^{-2}$

=> $S = \{(e^5\,; e^{-2})\ ;\ (e^{-2}\,;\ e^5)\}$

c- $\begin{cases} 2lnx - lny = 0 & \textbf{(1)} \\ 4lnx + lny = 3 & \textbf{(2)} \end{cases}$

La somme des équations **(1)** et **(2)** donne : $6lnx = 3$ => $lnx = \frac{1}{2}$ => $x = e^{\frac{1}{2}}$

En remplaçant $x = e^{\frac{1}{2}}$ par sa valeur dans l'équation **(1)**, on a : $2lne^{\frac{1}{2}} - lny = 0 \Leftrightarrow$
$2 \times \frac{1}{2} - lny = 0 \Leftrightarrow 1 - lny = 0$ => $lny = 1$ => $y = e$

=> S= $\left\{\left(e^{\frac{1}{2}}\,; e\right)\ ;\ \left(e\,; e^{\frac{1}{2}}\right)\right\}$

2) a- Donnons la solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 0.$

$y'' + 4y = 0$. Ici $w^2 = 4$ => $w = 2$
S $= f(x) = C_1coswx + C_2sinwx$ => S $= f(x) = C_1cos2x + C_2sin2x$. Avec $(C_1\,; C_2) \in \mathbb{R}^2$

b- Déterminons la solution particulière f de (E) telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$

Conditions : $f(0) = 2\ et\ f'(0) = 0$

$f(x) = C_1cos2x + C_2sin2x$ Alors $f(0) = 2 \Leftrightarrow C_1 = 2$

$f'(x) = -2C_1sin2x + 2C_2cos2x$ Alors $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 2C_2 = 0$ => $C_2 = 0$

D'où $f(x) = 2cos2x$

c) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $2y' + 3y = 0.$

$2y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{3}{2}y = 0.$ Ici $a = -\frac{3}{2}$ => $S = f(x) = ke^{-\frac{3}{2}x}$. Avec $(k \in \mathbb{R})$

Problème……………………………………………………………$(\boldsymbol{10\ points})$

f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies sur l'intervalle $]0\,; +\infty[$ par :
$f(x) = \frac{1+2lnx}{x^2}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

On désigne par (C) et (H) les courbes représentatives de f et g dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité $4cm$

Partie A

1) a- Prouvons que $f'(x)$ est du signe de $-4lnx$ sur $]0\,;\ 1[$ et $]1\,;\ +\infty[$

$$f(x) = \frac{1+2lnx}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x^2)-2x(1+2lnx)}{x^4} = \frac{2x-2x(1+2lnx)}{x^4} = \frac{2x-2x-4xlnx}{x^4} = \frac{-4lnx}{x^3}$$

$\forall x \in]0\,;\ +\infty[\,;\ x^3 > 0$ Alors le signe de $f'(x)$ est du signe de $-4lnx$ sur $]0\,;\ 1[$ et $]1\,;\ +\infty[$.

b- Dressons le tableau de variations de *f*.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

c- Précisons les droites asymptotes à (C)

Les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont asymptotes à (C)

2) Etudions la position de (C) par rapport à l'axe des abscisses

Posons $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+2lnx}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2lnx = 0 \Leftrightarrow lnx = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

- Pour $x \in \left]0\,;\ e^{-\frac{1}{2}}\right[$; (C) est en dessous de (ox).
- Pour $x \in \left]e^{-\frac{1}{2}}\,;+\infty\right[$; (C) est au dessus de (ox).
- Pour $x = e^{-\frac{1}{2}}$; (C) et (ox) sont confondus.

Donnons une équation de la tangente à (C)au point d'abscisse $x = e^{-\frac{1}{2}}$

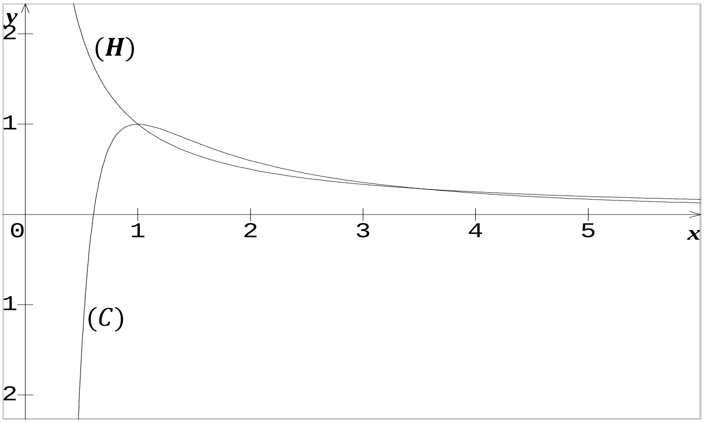
$$y = f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x - e^{-\frac{1}{2}}\right) + f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = 2e^{\frac{3}{2}}\left(x - e^{-\frac{1}{2}}\right) + 0 = 2e\sqrt{e}x - 2e$$

D'où $y = 2e\sqrt{e}x - 2e$

3) Calculons l'intégrale $\int_1^2 g(t)dt$

$$\int_1^2 g(t)dt = \int_1^2 \frac{1}{t}dt = [lnt]_1^2 = ln2$$

4) Construisons (C)et $(\boldsymbol{H})$



<u>Partie B</u>

1) Démontrons que la position relative de (C)et $(\boldsymbol{H})$ peut se déduire du signe de $h(x) = 1 + 2lnx - x$.

La position relative de (C)et $(\boldsymbol{H})$ peut se déduire du signe de $f(x) - g(x)$.

Calculons $f(x) - g(x) = \frac{1+2lnx}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1+2lnx-x}{x^2}$. En posant $h(x) = 1 + 2lnx - x$, on a : $f(x) - g(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

$\forall x \in]0\,;\,1[$ et $]1\,;\,+\infty[$; $x^2 > 0$ Alors la position relative de (C)et $(\boldsymbol{H})$ peut se déduire du signe de $h(x) = 1 + 2lnx - x$ sur $]0\,;\,1[$ et $]1\,;\,+\infty[$.

$h(x) = 1 + 2lnx - x$ => $h'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$

x	0	α		2		β	$+\infty$
$h'(x)$	‖		$+$	0	$-$		
$h(x)$	‖ $-\infty$	0	↗	$-1 + 2ln2$	↘	0	$-\infty$

2) En utilisant les variations de la fonction h, Prouvons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0\,;\,2[$.
Calculons $h(1)$ puis montrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β dans l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ dont on précisera la valeur.

Justifions l'encadrement $3 < \beta < 4$

- Sur l'intervalle $]0\,;\,2[$, h est continue, et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]0\,;\,2[$ sur $]-\infty\ ;\ h(2)[$. Par conséquent il existe une unique solution $\alpha \in]0\,;\,2[$ tel que $h(\alpha) = 0$

- Puisque $h(1) = 0$ alors 1 est une solution de l'équation $h(x) = 0$
  Sur l'intervalle$]2\,;\,+\infty[$, h est continue, et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $]2\,;\,+\infty[$ sur $]-\infty\ ;\ h(2)[$. Par conséquent il existe une unique solution $\beta = 1$ tel que $h(\beta) = 0$.
  Justifions l'encadrement $3 < \beta < 4$

  $$\begin{cases} h(3) = 1 + 2ln3 - 2 = -2 + 2ln3 > 0 \\ h(4) = 1 + 2ln4 - 4 = -3 + 2ln4 < 0 \end{cases}$$

D'où $\beta \in]3\,;\,4[$ par conséquent $3 < \beta < 4$

3) Précisons le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x

D'après le tableau de variation de h :

- $\forall\, x \in]0\,;\,\alpha[\, \cup\,]1\,;\,+\infty[; h(x)\ > 0.$

- $\forall\, x \in]\alpha\,;\,1[; h(x)\ > 0.$

Position relative des courbes (C)et (***H***).
De ce qui précède, on a :

- $\forall\, x \in]0\,;\,\alpha[\, \cup\,]1\,;\,+\infty[$; la courbe (C) est en dessous de la courbe (***H***).

- $\forall\, x \in]\alpha\,;\,1[$; la courbe (C) est au dessus de la courbe (***H***).

4) Calculons l'intégrale : $I(\alpha) = ln \int_{\alpha}^{ln2}(-4e^{2x} + 8e^{x})\,dx$ où α est un réel strictement inférieur à $ln2$.

$$I(\alpha) = ln \int_{\alpha}^{ln2}(-4e^{2x} + 8e^{x})\,dx = \left[-4 \times \frac{1}{2}e^{2x} + 8e^{x}\right]_{\alpha}^{ln2} = [-2e^{2x} + 8e^{x}]_{\alpha}^{ln2}$$

$$= 8 + 2e^{2\alpha} + 8e^{\alpha}$$

Bac. Session de Juin 2002

Exercice 1……………………………………………………..……(5 *points*)

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes

1) Résous dans $\mathbb{C}$ le système suivant : $\begin{cases} x+y+iz=0 \\ x+y-\ z=0 \\ (1+i)Z-2y+Z=2-2i \end{cases}$

2) $(x\ ;\ y\ ;Z)$étant la solution du système ci – dessus, on désigne par A ; B et C les points du plan d'affixes x ; y et Z.

a- Détermine le module et un argument du nombre complexe $Z=\frac{z-x}{z-y}$

b- En déduis la nature du triangle ABC puis le Construis dans le plan muni d'un repère orthonormal.

3) Calcule $\int_0^1 \frac{x^3-2x^2-2x-2}{x+1}dx$

4) Résous l'équation différentielle: $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Détermine la solution particulière f qui vérifie : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

Exercice 2………………..……………………………………………(5 *points*)

1) (u_n) est une suite arithmétique définie par : $u_3=2$ et $u_7=14$

a- Détermine la raison r de cette suite, puis exprime $u_n$en fonction de n.

b- Calcule $S_{20}=u_2+u_3+u_4+\ldots.+u_{20}$.

2) Une urne contient 5 boules rouges et 7 boules blanches indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément et au hasard 5 boules de l'urne

Détermine le nombre de tirages contenant :

a- 3 boules rouges et 2 boules blanches.

b- 3 boules blanches et 2 boules rouges.

c- Résous dans $\mathbb{N}$ l'équation : $4C_n^4-5C_n^{n-3}=0$.

Problème…………………………..………..……………………(10 *points*)

1) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\frac{x-1}{x}+lnx$

a- Détermine l'ensemble de définition D_f de f.

b- Calcule les limites aux bornes de D_f puis étudie les variations de f.

c- Calcule $f(1)$. En déduis le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x)=|x-1|lnx$.

a- Détermine l'ensemble de définition D_g de g puis écris $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

b- Calcule les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

c- Etudie les variations de g (On utilisera la question 1)

d- Trace la courbe (C) dans le plan muni d'un repère orthonormal $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\imath})$d'unité graphique $2cm$.

3) a- Prouve que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
   b- La bijection réciproque g^{-1} est elle dérivable en 0 ? Justifie ta réponse.

4) Calcule puis hachure le domaine plan (D) limité par la courbe (C) de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

Correction Bac 2002

Exercice 1……………………………………………………..……$(5\ \boldsymbol{points})$

1) Résolvons dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + iz = 0 & (1) \\ x + y - z = 0 & (2) \\ (1+i)x - 2y = 2z - 2i & (3) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow$ $z = x + y$ puis en substituant z par sa valeur dans (1) et (3), on a :

$$\begin{cases} x - y + i(x+y) = 0 \\ (1+i)x - 2y = 2(x+y) - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (2+i)x - 2 + 2i \\ (-1+i)x - 4i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = (2+i)(1-i) - 2 + 2i \\ x = 1 - i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + i \\ x = 1 - i \end{cases}$$

Or $z = x + y$ $\Leftrightarrow$ $z = 1 - i + 1 + i = 2$. D'où S= $\{1 - i\,; 1 + i\,; 2\}$

2) $(x\,;\ y\,; z)$étant la solution du système ci – dessus, on désigne par A ; B et C les points du plan d'affixes x ; y et z.

a- Déterminons le module et un argument du nombre complexe $Z = \frac{z-x}{z-y}$

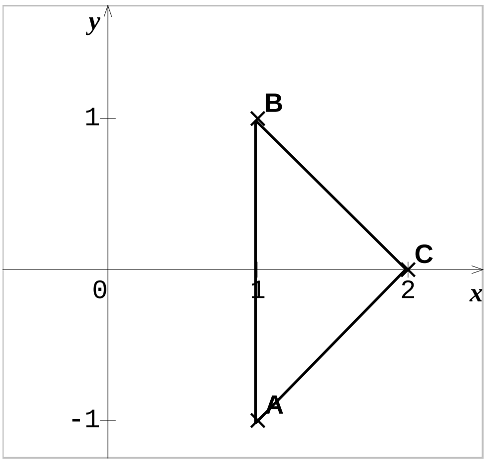
$z_A = 1 - i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = 2$

=> $Z = \frac{2-(1-i)}{2-(1+i)} = \frac{2-1+i}{2-1-i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{2} = \frac{2i}{2} = i$

Donc $|Z| = \left|\frac{z-x}{z-y}\right| = |i| = 1$ et $arg(Z) = arg\left(\frac{z-x}{z-y}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$

b- En déduisons la nature du triangle ABC puis le construisons dans le plan muni d'un repère orthonormal.

$|Z| = \left|\frac{z-x}{z-y}\right| = 1$ et $arg(Z) = arg\left(\frac{z-x}{z-y}\right) = \frac{\pi}{2}$ alors ABC est un triangle isocèle en C.



3) Calculons $\int_0^1 \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 2}{x+1} dx$

$\int_0^1 \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 2}{x+1} dx = \int_0^1 \left(x^2 - 3x + 1 - \frac{3}{x+1}\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - 3ln|x+1|\right]_0^1$

=> $\int_0^1 \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 2}{x+1} dx = -\frac{1}{6} - 3ln2.$

4) Résolvons l'équation différentielle: $y'' - 2y' + 2y = 0.$

(E.C) : $r^2 - 2r + 2 = 0$ => $\Delta = -4 = 4i^2$. $(\Delta < 0)$.

$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$

$r_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$

et S $= f(x) = (C_1 cosx + C_2 sinx)e^x$. Avec $(C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$

Déterminons la solution particulière f qui vérifie : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

$\begin{cases} f(x) = (C_1 cosx + C_2 sinx)e^x \\ \qquad et \\ f'(x) = [(C_1 + C_2)cosx + (-C_1 + C_2)sinx]e^x \end{cases}$ Donc $\begin{cases} f(0) = 1 \\ \quad et \\ f'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ \quad et \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ \quad et \\ C_2 = 1 \end{cases}$. D'où $f(x) = (cosx + sinx)e^x$

Exercice 2……………….……………………………………….$(\mathbf{5\ points})$

1) (u_n) est une suite arithmétique définie par : $u_3 = 2$ et $u_7 = 14$

a- Déterminons la raison r de cette suite, puis exprimons u_n en fonction de n.

L'expression d'une suite arithmétique u_n en fonction de n est : $u_n = u_p + (n-p)r$.
Or $p = 3$ (indice du premier terme) => $u_n = u_3 + (n-3)r$

D'autre part on connait le 7ième terme $u_7 = 14$ => $u_7 = u_3 + (7-3)r \Leftrightarrow u_7 = u_3 + 4r$

$\Leftrightarrow 14 = 2 + 4r \Leftrightarrow 4r = 14 - 2 \Leftrightarrow r = 3.$

D'où $r = 3$ et $u_n = 2 + 3(n-3) = 3n - 7.$

b- Calculons $S_{20} = u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{20}$.

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique en fonction de n est

$S_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$. Or $p = 2$ => $S_n = \frac{(n-2+1)(u_2+u_n)}{2} = \frac{(n-1)(u_2+u_n)}{2}$

Or $u_n = 3n - 7$ => $u_2 = 6 - 7 = -1$

Donc $S_n = \frac{(n-1)(-1+3n-7)}{2} = \frac{(n-1)(3n-8)}{2}$

$S_{20} = \frac{(20-1)(3\times 20-8)}{2} = \frac{(20-1)(3\times 20-8)}{2} = 494$

2) Une urne contient 5 boules rouges et 7 boules blanches indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément et au hasard 5 boules de l'urne

NB : Tout d'abords, faisons une traduction mathématique des affirmations ci-dessus :

- Une urne contient 5 boules rouges et 7 boules blanches alors $n = 5 + 7 = 12$
- On tire 5 boules de l'urne alors $p = 5$
- l'énoncé contient le mot : simultanément**,** cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments n'a pas d'importance.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la combinaison:** $\boldsymbol{C_n^p} = C_{12}^5$

Déterminons le nombre de tirages contenant :

a- 3 boules rouges et 2 boules blanches.

$C_5^3 \times C_7^2 = 210$

b- 3 boules blanches et 2 boules rouges.

$C_7^3 \times C_5^2 = 350$

c- Résolvons dans ℕ l'équation : $4C_n^4 - 5C_n^{n-3} = 0.$

$4C_n^4 - 5C_n^{n-3} = 0$

$D_v = \{x/x \in \mathbb{N}; x \geq 4\}$. Alors $x \geq 4$ =>$D_v = [4\ ;\ +\infty[$

$4C_n^4 - 5C_n^{n-3} = 0 \Leftrightarrow 4\frac{n!}{(n-4)!\times 4!} - 5\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!\times 3!} = 0 \Leftrightarrow$

$n(n-1)(n-2)(n-3-5) = 0 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2)(n-8) = 0$

$\Leftrightarrow n = 0$ ou $n - 1 = 0$ ou $n - 2 = 0$ ou $n - 8 = 0$

$\Leftrightarrow n = 0 \notin D_v$ Ou $n = 1 \notin D_v$ Ou $n = 2 \notin D_v$ Ou $n = 8 \in D_v$

=> S= {8}

Problème………………………..………..…………………..($\mathbf{10}\ \boldsymbol{points}$)

1) On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = \frac{x-1}{x} + lnx$

a- Déterminons l'ensemble de définition D_f de f.

$Df = \{x/x \in \mathbb{R}; x \neq 0\ et\ x > 0\}$ => $Df =]0\ ;\ +\infty[$

b- Calculons les limites aux bornes de D_f

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-1}{x} + lnx = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x} + lnx = +\infty$

Étudions les variations de f.

$f(x) = \frac{x-1}{x} + lnx$ => $f'(x) = \frac{x+1}{x^2} > 0$ Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$+$		
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

c- Calculons $f(1)$.

$f(1) = \frac{1-1}{1} + ln1 = 0$

En déduisons le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
De ce qui précède, on a :

$\forall x \in]0\ ;1[;\ f(x) < 0$ et $\forall x \in]1\ ;+\infty[;\ f(x) > 0$

2) Soit g une fonction de ℝ dans ℝ définie par $g(x) = |x - 1|lnx$.

a- Déterminons l'ensemble de définition D_g de g

$Dg = \{x/x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$ => $Dg =]0\ ;\ +\infty[$

Ecrivons $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

Posons $x - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 1$

x	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\|x-1\|$	$-x+1$		$x-1$
$g(x)$	$(-x+1)lnx$		$(x-1)lnx$

D'où $\begin{cases} g(x) = (-x+1)lnx & \forall x \in]0\,;1] \\ \quad et & \\ g(x) = (x-1)lnx & \forall x \in [1\,;\,+\infty[\end{cases}$

b- Calculons les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} |x-1|lnx = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} |x-1|lnx = +\infty$

c- Etudions les variations de g (On utilisera la question 1)

- Pour $x \in]0\,;1]$; on a : $g(x) = (-x+1)lnx$

$\Rightarrow g'(x) = -lnx + \frac{1-x}{x} = -\left(\frac{x-1}{x} + lnx\right) = -f(x)$

Donc Pour $x \in]0\,;1]$; $g'(x) > 0$ et par conséquent g est croissante.

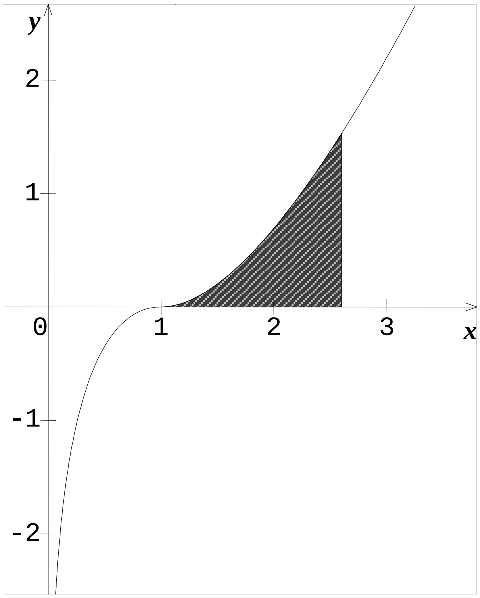
- Pour $x \in [1\,;\,+\infty[$; on a : $g(x) = (x-1)lnx$

$\Rightarrow g'(x) = lnx + \frac{x-1}{x} = \frac{x-1}{x} + lnx = f(x) > 0$

Donc Pour $x \in [1\,;\,+\infty[$; $g'(x) > 0$ et par conséquent g est croissante.

NB : g est dérivable en 1 et $g'(1) = 0$

d- Traçons la courbe (C) de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\imath})$d'unité graphique $2cm$.



3) a- Prouvons que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

Pour $x \in]0\,;\,+\infty[$; g est continue et croissante donc elle réalise une bijection $]0\,;\,+\infty[$ sur $J = g(]0\,;\,+\infty[) =]-\infty\,;\,+\infty[$

b- Vérifions si la bijection réciproque g^{-1} est dérivable en 0
g^{-1} est dérivable en 0 lorsque $g'[g^{-1}(0)] \neq 0$. Or $g'[g^{-1}(0)] = g'(1) = 0$

Donc g^{-1} n'est pas dérivable en 0

4) Calculons puis hachurons le domaine plan (D) limité par la courbe (C) de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

$(D) = \int_1^e g(x)dx = \int_1^e (x-1)lnxdx$

Posons $u = lnx$ => $u' = \frac{1}{x}$

$v' = x - 1$ => $v = \frac{1}{2}x^2$

=> $(D) = \left[\frac{1}{2}x^2 \times lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{2}x^2 dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \times lnx\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 \times lnx\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \left[\frac{1}{2}x^2 \times lnx - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e =$

$= \left(\frac{1}{2}e^2 \times lne - \frac{1}{4}e^2\right) - \left(\frac{1}{2} \times ln1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}\,cm^2$

=> $(D) = \frac{e^2+1}{4}\,cm^2$

Bac. Session de Juin 2003

Exercice 1……………………………………………………..……$(5\ points)$

1) Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx$

a- En utilisant la méthode d'intégration par parties, Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_{n-1}$. $(On\ remarquera\ que : sin^n x = \ sinx \times sin^{n-1} x\ )$

b- Calcule I_0 en déduis I_2 et I_4 .

2) Soit le polynôme $p(Z) = Z^4 - 2Z^3 + 3Z^2 - 2Z + 2$d'inconnue complexe Z.

a- Montre que si Z_0 est une solution de l'équation $p(Z) = 0$ alors son conjugué $\overline{Z_0}$ est aussi solution de l'équation $p(Z) = 0$.

b- Calcule $P(-i)$ puis résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.

c- Ecris chacune des solutions sous forme exponentielle.

Exercice 2…………………..……………………………………………$(5\ points)$

1) Soit la suite (u_n) définie dans $\mathbb{N}^*$ par: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$.
On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ $(\mathbf{1})$.
a- Exprime v_n en fonction de n et montre que (v_n) est une suite arithmétique dont on Déterminera le 1er terme et la raison.
b- Calcule $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.
c- Utiliser la relation $(\mathbf{1})$ pour trouve une autre expression de S_n. En déduis u_n en fonction de n. Calcule la limite de u_n.
2) Une urne contient 15 boules indiscernables au toucher dont 10 sont rouges, 3 bleues et 2 vertes.
Le principe d'un jeu est le suivant : le joueur paye 50 F au début de chaque jeu et ensuite il tire simultanément 2 boules de l'urne ;

- Le tirage d'une boule rouge ne donne rien.
- Chaque boule bleue tirée rapporte 50 F.
- Chaque boule verte tirée rapporte 250 F.

Un joueur joue une fois, quelle est la probabilité pour ce joueur :
a- de ne ni gagner, ni perdre ? (gagner 0F)
b- de perdre 50 F ?
c- de gagner 50 F ?
d- de gagner 250 F ?
NB: Le gain algébrique du joueur est la différence entre le montant obtenu à l'issue du jeu et celui payé au début du jeu.

Problème…………………………..………..……………………$(10\ points)$

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.
1) Détermine la limite de $f(x)$ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interpréter ces résultats.
2) a- Etablis que pour tout x réel $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$. En déduis le signe de $f'(x)$, puis le tableau de variation de f.
b- Ecris l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x = 0$.
c- Construis la courbe (C) et la tangente (T) dans le plan muni du repère orthonormé $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ $(unit$é $2cm)$

3) Démontre que l'équation $f(x) = 2$ a deux solutions distinctes sur $[-2\,;4]$
4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{-x}$.
a- Détermine les réels a et b pour que g soit une primitive de f.
b- Calcule en unité d'aire la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -2$ et $x = 4$. Donne une valeur approchée de l'aire à 10^{-2} près par défaut en cm^2.

Correction Bac 2003

Exercice 1……………………………………………………..……($\boldsymbol{5\ points}$)

1) Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx$

a- En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_{n-1}$. $(On\ remarquera\ que : sin^n x = sinx \times sin^{n-1}x)$
$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{n-1}x \bullet Sinx\, dx$

Posons : $u(x) = Sin^{n-1}x \Rightarrow u'(x) = (n-1)cosxSin^{n-2}x$
$v'(x) = Sinx \Rightarrow v(x) = -cosx$

Alors $I_n = [-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -cosx(n-1)cosxSin^{n-2}x\, dx$

$$\Rightarrow I_n = [-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2xSin^{n-2}x\, dx$$

$$= [-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - sin^2x)Sin^{n-2}x\, dx$$

$$= [-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(Sin^{n-2}x - sin^n x)\, dx$$

$$= [-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{n-2}x\, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^n x\, dx$$

$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{n-2}x\, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^n x\, dx$. Avec $[-cosxSin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

$\Rightarrow I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ ou $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$

b- Calculons I_0 en déduis I_2 et I_4 .

- Pour $n = 0$; on a : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^0 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$
- Pour $n = 2$; on a : $I_2 = \frac{(2-1)}{2} I_{2-2} = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
- Pour $n = 4$; on a : $I_4 = \frac{(4-1)}{4} I_{4-2} = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{16}$.

2) Soit le polynôme $p(Z) = Z^4 - 2Z^3 + 3Z^2 - 2Z + 2$ d'inconnue complexe Z.

a- Montrons que si Z_0 est une solution de l'équation $p(Z) = 0$ alors son conjugué $\overline{Z_0}$ est aussi solution de l'équation $p(Z) = 0$.
Z_0 est solution de l'équation $p(Z) = 0 \Leftrightarrow Z_0^4 - 2Z_0^3 + 3Z_0^2 - 2Z_0 + 2 = 0$

En appliquant la propriété du conjugué $\left(\overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z'}\right)$, on a :

=> $\overline{Z_0^4 - 2Z_0^3 + 3Z_0^2 - 2Z_0 + 2} = \bar{0} \Leftrightarrow \overline{Z_0^4} - 2\overline{Z_0^3} + 3\overline{Z_0^2} - 2\overline{Z_0} + 2 = 0$

D'où Z_0 est une solution de l'équation $p(Z) = 0$ alors le complexe $\bar{Z}_0$ est aussi solution de l'équation $p(Z) = 0$.

b- Calculons $P(-i)$

$P(-i) = (-i)^4 - 2(-i)^3 + 3(-i)^2 - 2(-i) + 2 = 1 - 2i - 3 + 2i + 2 = 0$

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.

$p(z) = (Z - Z_0)(Z - \bar{Z}_0)(aZ^2 + bZ + c) \Leftrightarrow p(z) = (Z + i)(Z - i)(aZ^2 + bZ + c)$

$\Leftrightarrow p(z) = aZ^4 + bZ^3 + (a + c)Z^2 + bZ + c$. Par identification avec

$p(Z) = Z^4 - 2Z^3 + 3Z^2 - 2Z + 2$, On a : $a = 1$; $b = -2$; $c = 2$

=> $p(z) = (Z + i)(Z - i)(Z^2 - 2Z + 2)$

$p(z) = 0 \Leftrightarrow (Z + i)(Z - i)(Z^2 - 2Z + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$Z + i = 0$ Ou $Z - i = 0$ ou $Z^2 - 2Z + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$Z = -i$ Ou $Z = i$ ou $Z^2 - 2Z + 2 = 0$ et $\Delta = -4 = 4i^2$

=> $Z_1 = \frac{2-\sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$ et $Z_2 = \frac{2+\sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$

D'où S= $\{-i\,;\, i\,;\, 1 - i\,;\, 1 + i\}$

c- Ecrivons chacune des solutions sous forme exponentielle.

- Pour $-i$ on a : $|-i| = 1$ et $arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ => $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
- Pour i on a : $|i| = 1$ et $arg(i) = \frac{\pi}{2}$ => $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
- Pour $1 - i$ on a : $|1 - i| = \sqrt{2}$ et $arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$ => $1 - i = e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
- Pour $1 + i$ on a : $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ => $1 + i = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

<u>Exercice 2</u>……………….……………………………………….(5 *points*)

1) Soit la suite (u_n) définie dans $\mathbb{N}^*$ par: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$.

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ (**1**).

a- Exprimons v_n en fonction de n

$v_n = u_{n+1} - u_n \Leftrightarrow v_n = (u_n + n) - u_n = u_n + n - u_n = n$. D'où $v_n = n$.

Montrons que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le 1er terme et la raison.

(v_n) Est une suite arithmétique si et seulement si $v_{n+1} - v_n = r$ avec $r \in \mathbb{R}$.

$v_n = n \Rightarrow v_{n+1} = n + 1$

Donc $v_{n+1} - v_n = n + 1 - n = 1$

D'où (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_1 = 1$.

b- Calculons $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

Pour une suite arithmétique on a $S_n = \frac{(n-p+1)(v_p+v_n)}{2}$. Or $p = 1$ (indice du premier terme)

$\Rightarrow S_n = \frac{(n-1+1)(v_1+v_n)}{2} = \frac{n(v_1+v_n)}{2}$. Or $v_1 = 1$ et $v_n = n$

$\Rightarrow S_n = \frac{n(1+n)}{2}$

c- Utilisons la relation $(\mathbf{1})$ pour trouver une autre expression de S_n.

On sait que : $v_n = u_{n+1} - u_n$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} v_1 = \cancel{u_1} - \cancel{u_1} \\ v_2 = \cancel{u_3} - \cancel{u_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cancel{u_{n-1}} \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_{n-1} = u_n - \cancel{u_{n-1}} \\ v_n = u_{n+1} - \cancel{u_n} \end{array}$$

En ajoutant membre à membre les termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$v_1 + \ldots.. + v_{n-1} = u_{n+1} - u_1 \Leftrightarrow S_n = u_{n+1} - u_1 \Leftrightarrow S_n = u_{n+1} - 1$

D'où l'autre expression de S_n est $S_n = u_{n+1} - 1$

En déduisons u_n en fonction de n.

Puisque $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ et $S_n = u_{n+1} - 1$ alors par identification on a : $u_{n+1} - 1 = \frac{n(1+n)}{2} \Leftrightarrow$

$u_{n-1+1} - 1 = \frac{(n-1)(1+n-1)}{2} \Leftrightarrow u_n - 1 = \frac{(n-1)(n)}{2} \Leftrightarrow u_n = \frac{n(n-1)}{2} + 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{n(n-1)+2}{2}$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{n^2-n+2}{2}$

Calculons la limite de u_n.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2-n+2}{2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2} = +\infty$$

2) Une urne contient 15 boules indiscernables au toucher dont 10 sont rouges, 3 bleues et 2 vertes.

Déterminons la probabilité pour ce joueur :

a- de ne ni gagner, ni perdre

$$P_A = \frac{C_3^1 \times C_{10}^1}{C_{15}^2} = \frac{30}{105} = \frac{2}{7}$$

b- de perdre 50 F

$$P_B = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2} = \frac{45}{105} = \frac{3}{7}$$

c- de gagner 50 F

$$P_C = \frac{C_3^2}{C_{15}^2} = \frac{3}{105}$$

d- de gagner 250 F

$$P_D = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_{15}^2} = \frac{6}{105} = \frac{2}{35}$$

Problème……………………………………………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Déterminons la limite de $f(x)$ en $-\infty$ puis en $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x+2)e^{-x} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+2)e^{-x} = 0$$

Interprétation des résultats.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Alors la courbe (C) admet une branche infinie en $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$

2) a- Etablissons que pour tout x réel $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$.

$f(x) = (x+2)e^{-x}$ => $f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+2) = \big(1-(x+2)\big)e^{-x} = (-x-1)e^{-x}$

=> $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$.

En déduisons le signe de $f'(x)$, puis le tableau de variation de f.

De ce qui précède, $\forall x \in Df$; $-e^{-x} < 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend de $x+1$

Posons $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

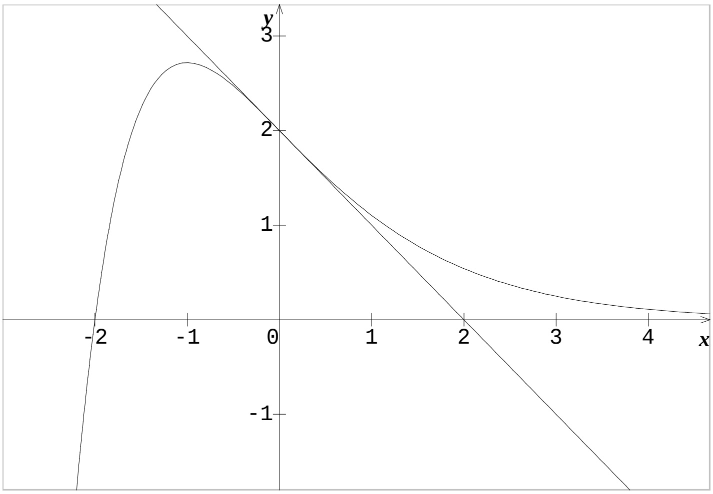
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-e^{-x}$		$-$		$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	e	↘	0

b- Ecrivons l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x = 0$.

$y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = -x + 2$.

D'où l'équation de la tangente (T) en $x = 0$ est (T): $y = -x + 2$.

c- Construisons la courbe (C) et la tangente (T)



3) Démontrons que l'équation $f(x) = 2$ a deux solutions distinctes sur $[-2\,;4]$

$\forall x \in [-2\,;-1], f$ est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $[-2\,;-1]$ sur $[0\,;e]$. Or $2 \in [0\,;e]$, donc il existe une unique solution $\alpha_1 \in [-2\,;-1]$ telque $f(\alpha_1) = 2$ **.** Par conséquent on dira que α_1 est une solution de l'équation $f(x) = 2$ **.**

De même:

$\forall x \in [-1\,;4], f$ est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $[-1\,;4]$ sur $[6e^{-4}\,;e]$. Or $2 \in [6e^{-4}\,;e]$, donc il existe une unique solution $\alpha_2 \in [-1\,;4]$ telque $f(\alpha_2) = 2$ **.** Par conséquent on dira que α_2 est une solution de l'équation $f(x) = 2$ **.**

<u>Conclusion :</u>

L'équation $f(x) = 2$ a deux solutions distinctes α_1 et α_2 sur $[-2\,;4]$ avec $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{-x}$.

a- Déterminons les réels a et b pour que g soit une primitive de f.

g est une primitive de f si et seulement si $g'(x) = f(x)$

$g(x) = (ax + b)e^{-x}$ => $g'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$

$g'(x) = f(x) \Leftrightarrow (-ax + a - b)e^{-x} = (x + 2)e^{-x} \Leftrightarrow -ax + a - b = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$

D'où la primitive g de f est $g(x) = (-x - 3)e^{-x} = -(x + 3)e^{-x}$

b- Calculons en unité d'aire la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -2$ et $x = 4$.
$A = (2cm)^2 \int_{-2}^{4} f(x)dx = 4cm^2[g(x)]_{-2}^{4} = 4cm^2(g(4) - g(-2))$

=> $A = 4cm^2(-7e^{-4} + e^2) \approx 20{,}04cm^2$

Bac. Session de Juin 2004

Exercice 1……………………………………………………………..……(5 points)

I//On considère les suites u_n et v_n définies pour tout entier naturel n par définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(U_n)^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)$$

1) Calcule v_0.

2) Démontre que v_n est une suite géométrique de raison 2.

3) Exprime v_n en fonction de n.

4) Calcule la limite de v_n .

5) Exprime u_n en fonction de v_n puis en déduis la limite de u_n

6) Pour tout entier naturel n, on pose :

$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}$

a- Démontre que : $S_n = (1 - 2^{n+1})ln2$

b- Justifie que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ puis en déduis T_n en fonction de n.

II// Dans une classe de terminale 88% des élèves ont déclarés aimer les mathématiques ; 20% ont déclarés aimer la chimie et 15% ont déclarés aimer les mathématiques et la chimie. On choisit un élève au hasard.

1) Quelle est la probabilité que cet élève aime les mathématiques et pas la chimie ?
2) Quelle est la probabilité que cet élève aime la chimie et pas les mathématiques ?
3) Quelle est la probabilité que cet élève n'aime ni les mathématiques ni la chimie ?

Exercice 2………………..…………………………………………(5 points)

Complète le tableau suivant :

Forme algébrique	$-5(1 - i\sqrt{3})$		
Forme trigonométrique			$2\left[cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right]$
Forme exponentielle		$e^{-\frac{5i\pi}{4}}$	

Problème……………………….………..……………………(10 points)

Une population de bactéries (exprimer en millier) a un rythme de croissance modélisé par la fonction $f(t) = \frac{60t + 40}{t + 10}$ où $t \in [0 ; +\infty[$ est le temps écoulé en jours.

1) Quelle est la population de cette culture au bout de 3 jours ? ; 5 jours ? ; 21 jours ?
2) Détermine les réels a et b tels que $f(t) = a + \frac{b}{t + 10}$ pour $t \in [0 ; +\infty[$.
3) a- Calcule la dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t)$.
   b- Justifie que la population de bactéries est croissante.
4) a- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(t) = 52$.
   a- En déduis à partir de quel jour la population de bactéries sera égal à 52.000 individus.
5) a- Quelle est la limite de f en $+\infty$?
   b- En déduis une interprétation quant à la population de bactéries.
6) Trace la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
   Echelle : 1 $cm \rightarrow$ 10 ans sur l'axe (ox) et 1 $cm \rightarrow$ 10.000 individus sur l'axe (oy).

Correction Bac 2004

Exercice 1……………………………………………………..……$(5\ points)$

I// On considère les suites u_n et v_n définies pour tout entier naturel n par définies par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2 \end{cases} \text{ et } \quad v_n = ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$$

1) Calculons v_0.

$v_n = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)$ => $v_0 = ln\left(\frac{3}{2}U_0\right) = ln\left(\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\right) = ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln2$ => $v_0 = -ln2$

2) Démontrons que v_n est une suite géométrique de raison 2.

(v_n), est une suite géométrique si et seulement si : $v_{n+1} = qv_n$ ou $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$

$v_n = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)$ =>$v_{n+1} = ln\left(\frac{3}{2}U_{n+1}\right) = ln\left(\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}(U_n)^2\right) = ln\left(\frac{9}{4}(U_n)^2\right) = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)^2$

$= 2ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) = 2v_n$

Alors v_n est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = -ln2$.

3) Exprimons v_n en fonction de n.

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q est:

$v_n = v_0(q)^n \Leftrightarrow v_n = -ln2(2)^n = -2^n ln2$.

4) Calculons la limite de v_n .

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} -2^n ln2 = -(+\infty)ln2 = -\infty \times ln2 = -\infty$

5) Exprimons u_n en fonction de v_n puis en déduisons la limite de u_n

$v_n = ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \Leftrightarrow \frac{3}{2}u_n = e^{v_n}$ => $u_n = \frac{2}{3}e^{v_n}$. Ainsi calculons la limite de u_n en $+\infty$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3}e^{v_n}$. Or $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ =>$\lim_{n\to+\infty} e^{v_n} = 0$

D'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3}e^{v_n} = \frac{2}{3}(0) = 0$

6) Pour tout entier naturel n, on pose :

$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}$

a- Démontrons que : $S_n = (1 - 2^{n+1})ln2$

La somme des $n$premiers d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q est :

$$S_n = \frac{v_0(1-q^{n+1})}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{-ln2(1-2^{n+1})}{1-2} = \frac{-(1-2^{n+1})ln2}{-1} = (1-2^{n+1})ln2$$

b- Justifions que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ puis en déduisons T_n en fonction de n

On sait que : $u_n = \frac{2}{3} e^{v_n}$

=> $u_0 = \frac{2}{3} e^{v_0}$

$u_1 = \frac{2}{3} e^{v_1}$

. .

. .

. .

$u_n = \frac{2}{3} e^{v_n}$

En effectuant membre à membre le produit des termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{(v_0+v_1+\cdots+v_{n-1})}$.

Or par hypothèse $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}$

Alors on a : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ (Ce qu'il fallait Démontre).

Déduisons T_n en fonction de n avec

On sait que : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ et d'après la question : 6)-a, on a : $S_n = (1 - 2^{n+1})ln2$.

Alors $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{(1-2^{n+1})ln2}$

II/ Dans une classe de terminale 88% des élèves ont déclarés aimer les mathématiques ; 20% ont déclarés aimer la chimie et 15% ont déclarés aimer les mathématiques et la chimie.
On choisit un élève au hasard.

NB : Tout d'abords, faisons une traduction mathématique des affirmations ci-dessus :

Soit $\mathrm{P}(M) = 88\% = \frac{88}{100} = 0{,}88$: la probabilité sur le pourcentage des élèves qui déclarent aimer les mathématiques.

Soit $\mathrm{P}(C) = 20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2$: la probabilité sur le pourcentage des élèves qui déclarent aimer la chimie.

Soit $\mathrm{P}(M \cap C) = 15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$: la probabilité sur le pourcentage des élèves qui déclarent aimer les mathématiques et la chimie.

Soit $\mathrm{P}(\bar{M}) = 1 - \mathrm{P}(M) = 1 - 0{,}88 = 0{,}12$: la probabilité de l'évènement contraire de $\mathrm{P}(M)$, c'est-à-dire le pourcentage des élèves qui n'aiment pas les mathématiques.

Soit $\mathrm{P}(\bar{C}) = 1 - \mathrm{P}(C) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$: la probabilité de l'évènement contraire de $\mathrm{P}(C)$, c'est-à-dire le pourcentage des élèves qui n'aiment pas la chimie.

1) Déterminons la probabilité pour que l'élève aime les mathématiques et pas la chimie
Soit $P(M \cap \bar{C})$ cette probabilité telle que : $P(M \cap \bar{C}) = P(M) \times P(\bar{C}) = 0{,}88 \times 0{,}8 = 0{,}704$

2) Déterminons la probabilité pour que l'élève aime la chimie et pas les mathématiques

Soit $P(C \cap \bar{M})$ cette probabilité telle que : $P(C \cap \bar{M}) = P(C) \times P(\bar{M}) = 0{,}2 \times 0{,}12 = 0{,}024$

3) Déterminons la probabilité pour que l'élève n'aime ni les mathématiques ni la chimie
Soit $P(\bar{M} \cap \bar{C})$ cette probabilité telle que : $P(\bar{M} \cap \bar{C}) = P(\bar{M}) \times P(\bar{C}) = 0{,}12 \times 0{,}8 = 0{,}096$

<u>Exercice 2</u>……………….…………………………………………(5 ***points***)

Le tableau complété est le suivant :

F. Algébrique	$-5(1 - i\sqrt{3})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
F. Trigonométrique	$10\left[cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$	$\left[cos\left(\frac{-5\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{-5\pi}{4}\right)\right]$	$2\left[cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right]$
F. Exponentielle	$10e^{\frac{4i\pi}{3}}$	$e^{-\frac{5i\pi}{4}}$	$2e^{-\frac{3i\pi}{4}}$

<u>Problème</u>………………………….………..……………………(10 ***points***)

Une population de bactéries (exprimer en millier) a un rythme de croissance modélisé par la fonction $f(t) = \frac{60t + 40}{t + 10}$ où $t \in [0 ; +\infty[$ est le temps écoulé en jours.

1) Déterminons la population de cette culture au bout de 3 jours ; 5 jours et 21 jours
- La population au bout de 3 jours est : $f(3) = \frac{60\times3 + 40}{3 + 10} = 16{,}92 \approx 17$ jours

- La population au bout de 5 jours est : $f(5) = \frac{60\times5 + 40}{5 + 10} = 22{,}66 \approx 23$ jours

- La population au bout de 21 jours est : $f(21) = \frac{60\times21 + 40}{21 + 10} = 41{,}93 \approx 42$ jours

2) Déterminons les réels a et b tels que $f(t) = a + \frac{b}{t + 10}$ pour $t \in [0 ; +\infty[$.
$f(t) = \frac{60t + 40}{t + 10}$. La divisions Euclidienne de $(60t + 40)$ par $(t + 10)$ donne pour quotient $q = 60$ et pour reste $R = -560$. Alors $f(t) = quotient + \frac{Reste}{Diviseur}$
$\Rightarrow f(t) = 60 + \frac{-560}{t + 10}$
et par comparaisons avec $f(t) = a + \frac{b}{t + 10}$, on a : $a = 60$ et $b = -560$

3) a- Calculons la dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t)$.

$f(t) = \frac{60t + 40}{t + 10} \Rightarrow f'(t) = \frac{560}{(t + 10)^2}$.

b- Justifions que la population est croissante.
D'après la question : a) ,$f'(t) > 0$. Alors $\forall\ t \in [\ 0\ ;\ +\infty\ [$, f est strictement croissante.
D'où la population est croissante.

4) a- Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(t) = 52$.

$$f(t) = 52 \Leftrightarrow \frac{60t + 40}{t + 10} = 52 \Leftrightarrow 60t + 40 = 52(t + 10) \Leftrightarrow 8t = 480 \Rightarrow t = 60 \text{ et } S = \{60\}$$

b- En déduisons le nombre de jours à partir du quel la population de cette culture sera égale à 52.000 individus.
D'après la question : b), la population de cette culture sera égale à 52.000 individus au bout de 60000 jours.

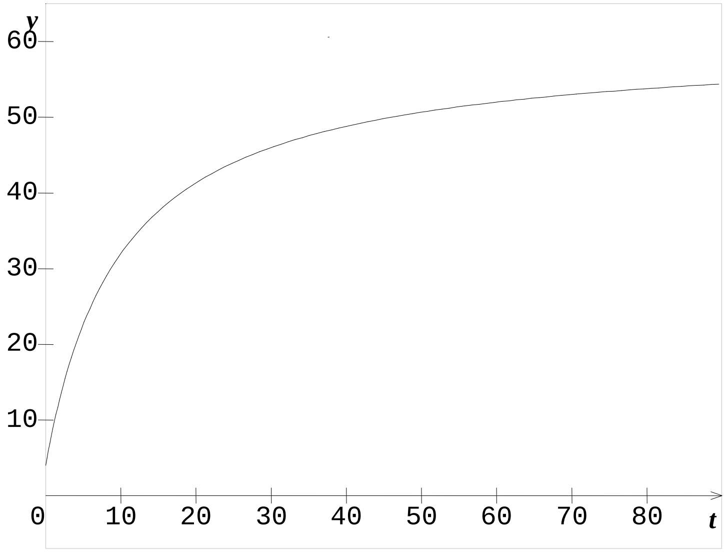
5) a- Déterminons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{60t + 40}{t + 10} = \lim_{t \to +\infty} \frac{60t}{t} = 60$$

b- En déduisons une interprétation quant à la population de cette culture.
D'après la limite ci-dessus, on dira que la population seuil de cette culture est de 60 individus.

6) Traçons la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Echelle : 1 cm → 10 ans sur l'axe (ot) et 1 cm → 10.000 individus sur l'axe (oy).



Bac. Session de Juin 2005

Exercice 1……………………………………………………..……(5 points)

I// Soient les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2 x cos^2 x dx$

1) Calcule $I - J$ et $I + J + K$

2) En déduis la valeur de : $I + J - 3K$ puis celles de I ; J et K.

II// Résous dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, les équations d'inconnue n

a) $C_n^2 = 45$; b) $n^2 + 3C_n^2 = 1$

Exercice 2………………..…………………………………………(5 points)

I // On considère un repère orthonormé directe (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$)du plan complexe. Soit les points A ; B ; C d'affixes respectives :

$Z_A = -1 + i$; $Z_B = \dfrac{2\left[Cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + iSin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{Cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ et $Z_C = 2 - 2i$

a- Ecris les complexe Z_A ; Z_B et Z_C sous forme exponentielle.

b- Détermine l'affixe Z_D du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OD}$) = $\frac{\pi}{3}$.

II // $y'' - 3y' + 2y = 0$; (C) passe par le point coordonnées ($ln2$; 0)et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4

Problème…………………………..………..……………………(10 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$

1) a- Démontre que pour tout réel x, on a : $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$.

b- Démontre que pour tout réel x, on a : $f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$. En déduis le signe de $f'(x)$.

c- Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

d- Dresse le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.

e- Représente la fonction f dans un repère orthogonal.

$(Unités: 4\ cm\ sur\ ox\ \ et\ 2\ cm\ sur\ oy\ )$

2) On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. A l'instant t où t est positif et exprimer en seconde, la concentration g de la substance injectée est :

$g(t) = 8(e^{-t} - e^{-2t})$. On rappelle que la ≪ **Concentration** ≫ est le rapport entre la quantité du liquide et la quantité du sang qui le contient.

a- En utilisant les résultats de la question 1), Donne le tableau de variation de la concentration du sang en fonction du temps t.

b- Au bout de combien de temps la concentration est elle maximale ? On Donnera une valeur approchée par défaut de ce résultat en centime de secondes.

c- Détermine les instants t_1 et t_2 pour les quels la concentration est égale au quart de sa valeur maximale.

Correction Bac 2005

Exercice 1...(**5 points**)

I// Soient les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2xcos^2xdx$

1) Calculons $I - J$ et $I + J + K$

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^4x - sin^4x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2x - sin^2x)(cos^2x + sin^2x)dx$

Or $cos^2x - sin^2x = cos2x$ et $cos^2x + sin^2x = 1$

=> $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2x\, dx$ => $I - J = \left[\frac{1}{2} sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = 0$

=> $I - J = 0$

Cacul de $I + J + K$

$I + J + K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2xcos^2xdx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^4x + sin^4x + 2sin^2x\,□os^2x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^4x + 2sin^2xcos^2x + sin^4x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2x + sin^2x)^2dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1)^2dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

=> $I + J + K = \frac{\pi}{2}$

2) Calcule : $I + J - 3K$ puis en déduis les valeurs de I ; J et K.

$I + J - 3K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2xcos^2xdx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx - 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^2xdx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^2xdx - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xcos^2xdx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^4x - 2sin^2xcos^2x + sin^4x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4sin^2xcos^2xdx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2x - sin^2x)^2dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2cosxsinx)^2dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos2x)^2dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin2x)^2dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^22x - sin^22x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos4xdx = \left[\frac{1}{4} sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0$

=> $I + J - 3K = 0$

Ainsi pour en déduis les valeurs de I ; J et K ; on forme le système avec les équations :

$I - J = 0$; $I + J + K = \frac{\pi}{2}$ et $I + J - 3K = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} I - J = 0 & (\mathbf{1}) \\ I + J + K = \frac{\pi}{2} & (\mathbf{2}) \\ I + J - 3K = 0 & (\mathbf{3}) \end{cases}$$

L'équation **(1)** donne $I - J = 0$ => $I = J$ puis en remplaçant I par J dans les equations :

(2) et **(3)** , on a : $\begin{cases} J + J + K = \frac{\pi}{2} \\ J + J - 3K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2J + K = \frac{\pi}{2} \\ 2J - 3K = 0 \end{cases}$

La resolution de ce système Donne: $J = \frac{3\pi}{16}$ et $K = \frac{\pi}{8}$.
En remplaçant J par sa valeur dans l'équation **(1) ,** on a : $I = \frac{3\pi}{16}$

II// Résous dans l'ensemble ℕ des entiers naturels, les équations d'inconnue n

a) $C_n^2 = 45$

$D_v = \{x/x \in \mathbb{N}; x \geq 2\}$. Alors $x \geq 2$ =>$D_v = [2\ ;\ +\infty[$

Résolvons ainsi l'équation $C_n^2= 45$

$C_n^2= 45 \Leftrightarrow \frac{n(\,n-\,1)}{2} = 45 \Leftrightarrow n(\,n-1) = 90 \Leftrightarrow n^2 - n = 90 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0$ et $\Delta = 361$

=> $n = -9 \notin D_v$ ou $n = 10 \in D_v$. Alors $S = \{10\}$

b) $n^2 + 3C_n^2= 1$
$D_v = \{x/x \in \mathbb{N}; x \geq 2\}$. Alors $x \geq 2$ =>$D_v = [2\ ;\ +\infty[$

Résolvons ainsi l'équation $n^2 + 3C_n^2= 1$

$n^2 + 3C_n^2= 1 \Leftrightarrow n^2 + 3\,\frac{n(\,n-\,1)}{2} = 1 \Leftrightarrow 2n^2 + 3n(\,n-1) = 2 \Leftrightarrow 2n^2 + 3n^2 - 3n = 2 \Leftrightarrow$

$5n^2 - 3n - 2 = 0$ et $\Delta = 49$

=> $n = \frac{2}{5} \notin \mathbb{N}$ ou $n = 1 \notin D_v$. Alors $S = \emptyset$

<u>Exercice 2</u>……………….……………………………………….($\mathbf{5}\ \boldsymbol{points}$)

I // On considère un repère orthonormé directe (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$)du plan complexe. Soit les points A ; B ; C d'affixes respectives :

$Z_A = -1 + i$; $Z_B = \frac{2\left[Cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + iSin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{Cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ et $Z_C = 2 - 2i$

1) Ecrivons les complexe Z_A ; Z_B et Z_C sous forme exponentielle.

$Z_A = -1 + i$ => $|Z_A| = \sqrt{2}$ et $\arg(Z_A) = \frac{3\pi}{4}$ => $Z_A = \sqrt{2}\ e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$Z_B = \frac{2\left[Cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + iSin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{Cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ => $Z_B = \frac{2e^{\frac{7\pi}{15}i}}{e^{-\frac{\pi}{5}i}} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$ => $Z_B = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$Z_C = 2 - 2i$ => $|Z_C| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(Z_C) = -\frac{\pi}{4}$ => $Z_C = 2\sqrt{2}\ e^{-\frac{\pi}{4}i}$

2) Déterminons l'affixe Z_D du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OD}$) = $\frac{\pi}{3}$.

OBD est équilatéral direct si et seulement si : $\frac{Z_D - Z_O}{Z_B - Z_O} = e^{\frac{\pi}{3}i} \Leftrightarrow \frac{Z_D}{Z_B} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ (car l'affixe de l'origine $Z_O = 0$). Alors $Z_D = Z_B e^{\frac{\pi}{3}i} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \times e^{\frac{\pi}{3}i} = 2e^{\pi i} = 2(-1) = -2$ => $Z_D = -2$

II // $y'' - 3y' + 2y = 0$; (C) passe par le point coordonnées ($ln2$; 0)et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4

(E.C) : $r^2 - 3r + 2 = 0$ => Δ= 1. ($\Delta > 0$). Alors $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$
=> $S = f(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ => $S = f(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$ Avec (C_1 ; C_2) ∈ $\mathbb{R}^2$
(C) passe par le point coordonnées ($ln2$; 0) => $f(ln2) = 0 \Leftrightarrow C_1 e^{ln2} + C_2 e^{2ln2} = 0 \Leftrightarrow C_1 e^{ln2} + C_2 e^{ln4} = 1 \Leftrightarrow 2C_1 + 4C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 + 2C_2 = 0$ **(1)**
(C) admet au point ($ln2$; 0) une tangente de coefficient directeur -4 => $f'(ln2) = -4$
Avec $f'(x) = C_1 e^{x} + 2\,C_2 e^{2x}$
$f'(ln2) = -4 \Leftrightarrow C_1 e^{ln2} + 2\,C_2 e^{2ln2} = -4 \Leftrightarrow C_1 e^{ln2} + 2\,C_2 e^{ln4} = -4 \Leftrightarrow 2C_1 + 8\,C_2 = -4$
$\Leftrightarrow C_1 + 4\,C_2 = -2$ **(2)**
Formons ainsi le système avec les équations **(1)** et **(2) :**

$$\begin{cases} C_1 + 2C_2 = 0 \\ C_1 + 4\,C_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + 2C_2 = 0 \\ -C_1 - 4\,C_2 = 2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad -2C_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -1$$

En remplaçant $C_2 = -1$ par sa valeur dans l'équation **(1),** on a : $C_1 = 2$

D'où $f(x) = 2e^{x} - e^{2x}$

<u>Problème</u>……………………………..……….……………………(10 *points*)
Soit la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$

1) a- Démontrons que pour tout réel x, on a : $f(x) = \frac{8(e^{x}-1)}{e^{2x}}$.
$f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$

=> $f(x) = 8e^{-2x}(e^{x} - 1)$

=> $f(x) = 8\frac{1}{e^{2x}}(e^{x} - 1)$

=> $f(x) = \frac{8}{e^{2x}}(e^{x} - 1)$

=> $f(x) = \frac{8(e^{x}-1)}{e^{2x}}$. D'où pour tout réel x, on a : $f(x) = \frac{8(e^{x}-1)}{e^{2x}}$.

b- Démontrons que pour tout réel x, on a : $f'(x) = \frac{8(2-e^{x})}{e^{2x}}$. En déduis le signe de $f'(x)$.

$f(x) = \frac{8(e^{x}-1)}{e^{2x}}$

Posons $u(x) = 8(e^{x} - 1)$ => $u'(x) = 8e^{x}$

$v(x) = e^{2x}$ => $v'(x) = 2e^{2x}$

=> $f'(x) = \frac{(8e^{x})(e^{2x}) - 8(2e^{2x})(e^{x}-1)}{(e^{2x})^2}$

$=> f'(x) = \frac{8e^{2x}(e^x - 2e^x + 2)}{e^{4x}} = \frac{8e^{2x}(-e^x + 2)}{e^{4x}} = \frac{8(2-e^x)}{e^{2x}}$

D'où pour tout réel x, on a : $f'(x) = \frac{8(2-e^x)}{e^{2x}}$

c- Déterminons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 8(e^{-x} - e^{-2x}) = \lim_{x \to -\infty} 8e^{-x}(1 - e^{-x}) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{8e^x}{e^{2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{8}{e^x} = 0$$

d- Dressons le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.

$f'(x) = \frac{8(2-e^x)}{e^{2x}}$

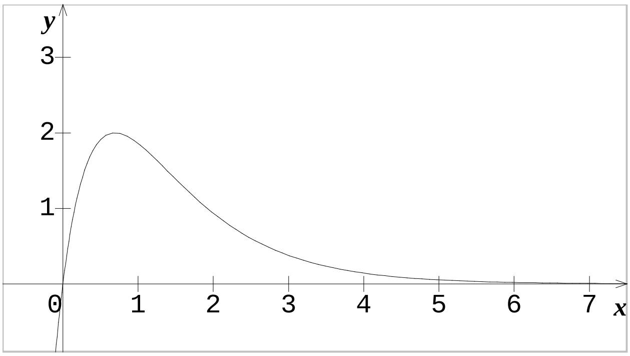
$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0$ Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $8(2 - e^x)$.

Posons $8(2 - e^x) > 0 \Leftrightarrow 2 - e^x > 0 \Leftrightarrow -e^x > -2 \Leftrightarrow e^x < 2 \Rightarrow x < ln2$

Alors $\forall\, x \in]-\infty\,; ln2[; f'(x) > 0$ et $\forall\, x \in]ln2\,; +\infty[; f'(x) > 0$

x	$-\infty$		$ln2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

e- Représentation de la fonction f dans un repère orthogonal.



2) On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. A l'instant t où t est positif et exprimer en seconde, la concentration g de la substance injectée est : $g(t) = 8(e^{-t} - e^{-2t})$. On rappelle que la ≪ **Concentration** ≫ est le rapport entre la quantité du liquide et la quantité du sang qui le contient.

a- En utilisant les résultats de la question 1), donnons le tableau de variation de la concentration du sang en fonction du temps t.

t	0		$ln2$		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

b- Déterminons le temps au bout du quel la concentration est elle maximale

D'après le tableau ci-dessus la concentration est elle maximale à l'instant $t = ln2 = 0{,}69\ s$

c- Détermine les instants t_1 et t_2 pour les quels la concentration est égale au quart de sa valeur maximale

La concentration est égale au quart de sa valeur maximale si et seulement si

$g(t) = \frac{1}{4} \times 2 \iff 8(e^{-t} - e^{-2t}) = \frac{1}{2} \iff e^{-t} - e^{-2t} = 0{,}06 \iff e^{-t} - e^{-2t} - 0{,}06 = 0 \iff$

$-e^{-2t} + e^{-t} - 0{,}06 = 0$. Ainsi effectuons un changement en posant $e^{-t} = X$

=> $X^2 - X + 0{,}06 = 0$; $\Delta = 0{,}76$. Alors $X_1 = 0{,}06$ et $X_2 = 0{,}93$

- Si $X = 0{,}06 \iff e^{-t} = 0{,}06 \iff -t = ln0{,}06 \iff -t = -2{,}81$ => $t = 2{,}81\ s$
- Si $X = 0{,}93 \iff e^{-t} = 0{,}93 \iff -t = ln0{,}93 \iff -t = -0{,}07$ => $t = 0{,}07\ s$

D'où $t_1 = 0{,}07\ s$ ou $t_2 = 2{,}81\ s$

Bac. Session de Juin 2006

Exercice 1……………………………………………………..……$(5\ \boldsymbol{points})$

Une entreprise veut réduire au maximum la quantité d'ordures dans une ville. Elle s'engage donc à détruire au moins 30 000 tonnes d'ordures par an.
En 2014, l'entreprise a rejeté 40 000 tonnes d'ordures.
Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année de 5 % la quantité d'ordure qu'elle détruit par rapport à la quantité détruite l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouvelles ordures par an en raison du développement de nouvelles activités.
Pour tout entier naturel n, on note q_n la quantité, en tonnes d'ordures pour l'année $(2014+n)$. On a alors $q_0 = 40\,000$.

1) a- Calculer q_1 et q_2.
   b- Montrer que pour tout entier naturel n, on a $q_{n+1} = 0{,}95q_n + 200$.

2) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $u_n = q_n - 400$
   a- Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b- Pour tout entier naturel n, exprimer (u_n) en fonction de n puis en déduire que pour tout entier naturel n, on a : $q_n = 36\,000 \times 0{,}95^n + 4\,000$.
   c- La quantité d'ordure détruite diminue-telle d'une année sur l'autre ? Justifier.
   d- Déterminer la limite de la suite (q_n) en $+\infty$.
   e- Sachant que la durée du contrat s'étale sur une période de 9 ans compté à partir de 2014, calculer une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité d'ordure qui serait détruite durant ce contrat.

Exercice 2……………….………………………………………$(5\ \boldsymbol{points})$

Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches. On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

1) Calcule la probabilité de chacune des évènements suivants :
a- Aucune boule rouge n'est tirée

b- Une boule rouge et une seule est tirée
c- Deux boules rouges et deux seulement sont tirées
d- Une boule rouge au moins est tirée
e- Deux boules blanches au plus sont tirées

2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées.
a- Donne la loi de probabilité de X

b- Calcule l'espérance mathématique et la variance de X
c- Calcule la probabilité de l'évènement : $1 \leq X \leq 2$

<u>Problème</u>……………………………..………...……………………(10 *points*)

Partie A

A l'instant $t = 0$ on injecte dans le sang d'un patient une dose de 3ml d'un médicament. On veut étudier le processus d'élimination du produit au cours des douze heures suivant l'injection. La quantité de médicament présente dans le sang en ml en fonction du temps t en heures est $f(t)$, où f est définie sur $[0\,;12]$par : $f(t) = 3e^{-0,1t}$.

1) Déterminez $f\,'(t)$ et justifier que pour tout $t \in [0\,;12]$, $f\,'(t) < 0$.

2) Dressez le tableau de variation de f sur [0 ; 12].

3) Calcule $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$; $f(6)$ et $f(8)$. Que représente chacune de ces valeurs ?

4) Trace la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques (1cm sur (Ox) et 4 cm sur (Oy)).

Partie B

Le médicament est inefficace lorsque la quantité contenue dans le sang est inférieure à $\boldsymbol{1,25ml}$, ainsi on procède à une seconde injection

1°/ Au bout de combien de temps on procèdera à la seconde injection ?

(On Déterminera ce temps graphiquement et par calcul).

2°/ On rappelle que le seuil de toxicité du médicament est de $\boldsymbol{4,5ml}$.

Le patient court –il un risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection ?

Correction Bac 2006

Exercice 1..($\boldsymbol{5\ points}$)

1) a- Calculons q_1 et q_2.

$q_1 = q_0 - 5\%q_0 + 200 = q_0(1-5\%) + 200 = q_0(1-0{,}05) + 200 = 0{,}95q_0 + 200$

=> $q_1 = 0{,}95 \times 40\,000 + 200 = 38200$

$q_2 = q_1 - 5\%q_1 + 200 = q_1(1-5\%) + 200 = q_1(1-0{,}05) + 200 = 0{,}95q_1 + 200$

=> $q_2 = 0{,}95 \times 38200 \ + 200 = 36490$

b- Montrons que pour tout entier naturel n, on a : $q_{n+1} = 0{,}95q_n + 200$.

$q_1 = 0{,}95q_0 + 200$

$q_2 = 0{,}95q_1 + 200$
.
.
.
$q_{n+1} = 0{,}95q_n + 200$
D'où pour tout entier naturel n, on a : $q_{n+1} = 0{,}95q_n + 200$.

2) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $u_n = q_n - 4000$
a- Démontrons que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
u_n est une suite géométrique si et seulement si : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = p = constante = raison$

$u_n = q_n - 4000$ => $u_{n+1} = q_{n+1} - 4000$. Or $q_{n+1} = 0{,}95q_n + 200$

=> $u_{n+1} = 0{,}95q_n + 200 - 4000 = 0{,}95q_n - 3800$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{0{,}95q_n - 3800}{q_n - 400} = \frac{0{,}95\left(q_n - \frac{3800}{0{,}95}\right)}{q_n - 400} = \frac{0{,}95(q_n - 400)}{q_n - 400} = 0{,}95$$

D'où u_n est une suite géométrique de raison $p = 0{,}95$ et de premier terme $u_0 = q_0 - 4000$

=> $u_0 = 40\,000 - 4000 = 36000$

b- Pour tout entier naturel n, exprimons (u_n) en fonction de n
u_n étant une suite géométrique de raison $p = 0{,}95$ et de premier terme $u_0 = 36000$, son expression est : $u_n = u_0 \times p^n$ => $u_n = 36000 \times 0{,}95^n$
En déduisons que pour tout entier naturel n, on a : $q_n = 36\,000 \times 0{,}95^n + 4\,000$.

On sait que : $u_n = q_n - 4000 \Leftrightarrow q_n = u_n + 4000$. Or $u_n = 36000 \times 0{,}95^n$

=> $q_n = 36\,000 \times 0{,}95^n + 4000$
c- Vérifions si la quantité d'ordure détruite diminue d'une année sur l'autre
D'après la question 1) a) , on a :

- En 2014 la quantité d'ordure était $q_0 = 40\,000\ tonnes$.
- En 2015 la quantité d'ordure sera $q_1 = 38200\ tonnes$.
- En 2016 la quantité d'ordure sera $q_2 = 36490\ tonnes$.

Donc d'après les calculs faites ci-dessus, on remarque que la quantité d'ordure détruite diminue d'une année sur l'autre.
d- Déterminons la limite de la suite (q_n) en $+\infty$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 36\,000 \times 0{,}95^n + 4000$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}95^n = 0$ car $0{,}95 < 1$

=> $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = 36\,000 \times 0 + 4000 = 4000$

On pourra ainsi dire que dans le future la quantité d'ordure dans toute la ville de Bamako ne dépassera pas $4000\ tonnes$.
e- Sachant que le contrat s'étale sur une durée de 9 ans compté à partir de 2014, calculons une estimation, en tonnes et à une tonne près, de la quantité d'ordure qui serait détruite durant ce contrat.
Cette quantité revient à calculer la quantité d'ordure qui serrait détruite au bout de 9 ans c'est-à-dire à calculer q_9

$q_9 = 36\,000 \times 0{,}95^9 + 4000 = 26688{,}97 \approx 26689\ tonnes$.

<u>Exercice 2</u>…………………..…………………………………………(5 *points*)
Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches. On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

- Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches : => $n = 5 + 3 = 8$.
- On tire simultanément et au hasard 3 boules: => $p = 3$.
- Puisque le tirage est simultanément alors le modèle mathématique utilisé est le C_n^p.
- Le nombre de cas possible est donc Card$(\Omega) = C_8^3 = 56$

1) Calculons la probabilité de chacune des évènements suivants :
a-Aucune boule rouge n'est tirée
Soit $P(A)$ cette probabilité telle que : $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ avec $\begin{cases} Card(A) = C_5^0 \times C_3^3 = 1 \\ Card(\Omega) = C_8^3 = 56 \end{cases}$

=>$P(A) = \frac{1}{56} = 0{,}018$

b-Une boule rouge et une seule est tirée

Soit $P(B)$ cette probabilité telle que : $P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)}$ avec $\begin{cases} Card(B) = C_5^1 \times C_3^2 = 15 \\ Card(\Omega) = C_8^3 = 56 \end{cases}$

=>$P(B) = \frac{15}{56} = 0{,}268$

c-Deux boules rouges et deux seulement sont tirées

Soit $P(C)$ cette probabilité telle que : $P(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)}$ avec $\begin{cases} Card(C) = C_5^2 \times C_3^1 = 30 \\ Card(\Omega) = C_8^3 = 56 \end{cases}$

=>$P(C) = \frac{30}{56} = 0{,}536$

d-Une boule rouge au moins est tirée

Soit $P(D)$ cette probabilité telle que : $P(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega)}$

avec $\begin{cases} Card(D) = C_5^1 \times C_3^2 + C_5^2 \times C_3^1 + C_5^3 \times C_3^0 = 55 \\ Card(\Omega) = C_8^3 = 56 \end{cases}$

=>$P(D) = \frac{55}{56} = 0{,}982$

e-deux boules blanches au plus sont tirées

Soit $P(E)$ cette probabilité telle que : $P(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)}$

avec $\begin{cases} Card(E) = C_3^2 \times C_5^1 + C_3^1 \times C_5^2 + C_3^0 \times C_5^3 = 55 \\ Card(\Omega) = C_8^3 = 56 \end{cases}$

=>$P(E) = \frac{55}{56} = 0{,}982$

2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées.

a-Donnons la loi de probabilité de X

Si l'on effectue un tirage simultané de 3 boules rouges parmi les 5 boules rouges, on obtient :
Soit 0 boule rouge ; soit 1 boule rouge ; soit 2 boules rouges 3 boules rouges.

D'où X = {0 ; 1 ; 2 ; 3 }.

Alors calculons : $P(\mathrm{X} = 0)$; $P(\mathrm{X} = 1)$; $P(\mathrm{X} = 2)$; $P(\mathrm{X} = 3)$

$P(\mathrm{X} = 0) = \frac{C_5^0 \times C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$; $P(\mathrm{X} = 1) = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}$

$P(\mathrm{X} = 2) = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56}$; $P(\mathrm{X} = 3) = \frac{C_5^3 \times C_3^0}{C_8^3} = \frac{10}{56}$

D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

NB : Pour une éventuelle vérification, on remarque : $\frac{1}{56} + \frac{15}{56} + \frac{30}{56} + \frac{10}{56} = \frac{56}{56} = 1$

Car la somme des lois de probabilités est toujours égale à 1

b-Calculons l'espérance mathématique et la variance de X
- L'espérance mathématique E(X).

E(X)= $\sum x_i \times P_i = 0 \times \frac{1}{56} + 1 \times \frac{15}{56} + 2 \times \frac{30}{56} + 3 \times \frac{10}{56} = \frac{105}{56} = 1{,}875$=> E$(X) = 1{,}875$

- La variance V(X).

V(X)= $\sum {x_i}^2 \times P_i - E^2(X) = 0^2 \times \frac{1}{56} + 1^2 \times \frac{15}{56} + 2^2 \times \frac{30}{56} + 3^2 \times \frac{10}{56} - 1{,}875^2 = 277{,}48$
=>V$(X) = 277{,}48$

c-Calculons la probabilité de l'évènement $1 \leq \mathrm{X} \leq 2$

$P(1 \leq \mathrm{X} \leq 2) = P(\mathrm{X} = 1) + P(\mathrm{X} = 2) = \frac{15}{56} + \frac{30}{56} = \frac{45}{56} = 0{,}803$

<u>Problème</u>…………………………..………..……………………(10 *points*)

Partie A

A l'instant $t = 0$ on injecte dans le sang d'un patient une dose de $3ml$ d'un médicament. On veut étudier le processus d'élimination du produit au cours des douze heures suivant l'injection. La quantité de médicament présente dans le sang en ml en fonction du temps t en heures est $f(t)$, où f est définie sur $[0\,;12]$ par : $f(t) = 3\mathrm{e}^{-0,1\mathrm{t}}$.

1) Déterminons $f'(t)$ puis justifions que pour tout $t \in [0\,;12]$, $f'(t) < 0$.

$f(t) = 3\mathrm{e}^{-0,1\mathrm{t}}$ => $f'(t) = -0{,}1 \times 3\mathrm{e}^{-0,1\mathrm{t}} = -0{,}3\mathrm{e}^{-0,1\mathrm{t}}$

Pour tout $t \in [0\,;12]$, $\mathrm{e}^{-0,1\mathrm{t}}) > 0$ alors $f'(t) = -0{,}3\mathrm{e}^{-0,1\mathrm{t}} < 0$.

2) Dressons le tableau de variation de f sur [0 ; 12].

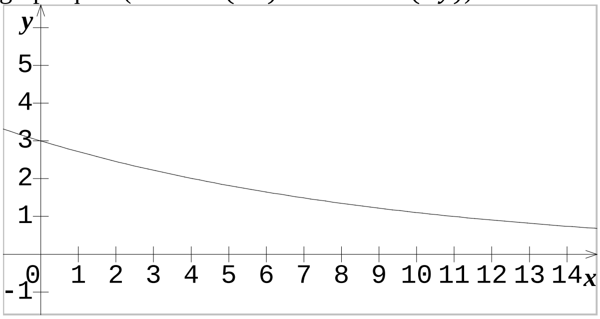
t	0		12
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	3	$\searrow$	$3\mathrm{e}^{-1.2}$

3) Calcule $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$; $f(6)$ *et* $f(8)$.

t	2	3	4	6	8
$f(t)$	2,45	2,22	2,01	1,64	1,34

Ainsi chacune de ces valeurs obtenues représente la quantité de médicament présente dans le sang en ml en fonction du temps t

4) Traçons la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques (1cm sur (Ox) et 4 cm sur (Oy)).



Partie B

Le médicament est inefficace lorsque la quantité contenue dans le sang est inférieure à $\mathbf{0,25}\boldsymbol{ml}$, ainsi on procède à une seconde injection

1°/ Déterminons le temps au bout du quel on procèdera à la seconde injection

On procèdera à la seconde injection si et seulement si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) < \mathbf{1,253} \Leftrightarrow \mathbf{e}^{-\mathbf{0,1t}} < \mathbf{0,253}$

$\Leftrightarrow -\mathbf{0,1t} < \boldsymbol{ln}(\mathbf{0,253}) \Leftrightarrow -\mathbf{0,1t} < -\mathbf{1,37} \Leftrightarrow \mathbf{0,1t} > \mathbf{1,37} \Leftrightarrow \mathbf{t} > \mathbf{13,7}$

D'où on peut procéder à la seconde injection à partir de $\mathbf{13}\boldsymbol{h}\ \mathbf{7}\boldsymbol{min}$

2°/ On rappelle que le seuil de toxicité du médicament est de $\mathbf{4,5}\boldsymbol{ml}$.

Vérifions si le patient court un risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection

Pour cela calculons $\boldsymbol{f}(\mathbf{13,7})$

$\boldsymbol{f}(\mathbf{13,7}) = 0{,}76\ ml$

Or $\mathbf{0,76}\ \boldsymbol{ml} < \mathbf{4,5}\boldsymbol{ml}$. alors il n'y a aucun risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection.

Bac. Session de Juin 2007

Exercice 1…………………………………………………………..……(5 ***points***)

I// Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

1) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$
2) Soit $P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

a- Montre que l'équation P(Z) = 0 admet une solution réelle notée z_0 que l'on Déterminera.
b- Factorise P(Z) puis Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0

II//: Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (o , i , j)

On donne les points A ; B et C d'affixes respectives : $Z_A = 2$; $Z_B = 4 + 2i$; $Z_C = -2 + 4i$

1) a- Calcule le rapport : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ et en déduis la nature du triangle ABC

b-Montre que le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$

c-Détermine (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe Z vérifiant l'équation suivante :
$|Z - 4 - 2i| = |Z + 2 - 4i|$

2) Soit S la similitude du plan telle que $S(A) = A$ et $S(B) = C$.

a- Détermine le rapport k et l'angle θ de la similitude S.
b- Détermine l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S.
a- En déduis le centre de la similitude S.

Exercice 2……………….……………………………………………(5 ***points***)

I//Soit (u_n), $n \in \mathbb{N}$, une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$).

On définit la suite (v_n), $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$.

a- Montre que (v_n), est une suite géométrique dont on Détermineras la raison et le premier terme v_0(on Exprimera v_0 en fonction de u_0).

b- Etudie suivant les valeurs de r la convergence de la suite v_n

2) Soit $w_n n \in \mathbb{N}$, la suite définie par $w_n = \int_0^n \frac{1}{4}e^{-2x}dx$.

a- Calcule w_n en fonction de n.

b- Montre que w_n converge vers un nombre réel l que l'on précisera.

c- On pose $S_n = w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n - \frac{n}{8}$. Calcule S_n en fonction de n puis en déduis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

II// Deux tireurs A et B font feu simultanément sur une cible.

La probabilité que A touche la cible est estimé à $\frac{4}{5}$; et pour celui de B est de $\frac{3}{4}$.

Calcule la probabilité des évènements suivants :

1) Les deux tireurs touchent tous deux la cible.
2) Les deux tireurs manquent la cible.
3) La cible est atteinte par le tireur A seulement.
4) La cible est atteinte par un tireur seulement.
5) La cible est atteint.
6) La cible soit manquée

Problème………………………..………..……………………($\mathbf{10}$ $\boldsymbol{points}$)

Partie A : Résolution de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_1})$: $y' - 2y = xe^x$

1) Résous l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_2})$: $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.
   a) Détermine a et b pour que u soit solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$.
   b) Montre qu'une fonction v est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$si et seulement si $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$.
   c) En déduis l'ensemble des solutions de $(\boldsymbol{E_1})$.
3) Détermine la solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Détermine la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
2) Etudie le sens de variation de g, puis Dresse son tableau de variation.
3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
   a- Vérifie que 0 est l'une de ces solutions.
   b- L'autre solution est appelée α. Montre que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$.
   c- Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie C : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)\, e^x$

1) Détermine la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur).
2) Calcule $f\,'(x)$ et Montre que $f\,'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Etudie le sens de variation de f.
3) Montre que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la **partie B**. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$).
4) Etablie le tableau de variation de f.
5) Trace la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (Unité graphique 2 cm).

Partie D : Calcul d'aire

1) Soit m un réel négatif, Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)dx$
2) a) Calcule $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
   b) En déduis $\int_m^0 f(x)dx$

3) Calcule la limite de $\int_m^0 f(x)dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.

Correction Bac 2007

<u>Exercice 1</u>………………………………………………………..……($5\ \boldsymbol{points}$)

I// Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct$(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$

$\Delta = [-(2 + 6i)]^2 - 4(1)(-16 + 12i) = 32 - 24i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 32 \\ 2xy = -24 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(32)^2 + (-24)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - y^2 = 32 & (1) \\ xy = -12 & (2) \\ x^2 + y^2 = 40 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 72 => x^2 = 36 => x = -6 \ \ ou \ \ x = 6$

(2) : $xy = -12 \ => y = \frac{-12}{x}$

- Si $x = -6 \ => y = \frac{-12}{-6} = 2$ et $\delta_1 = x + iy \ => \delta_1 = -6 - 2i$
- Si $x' = 6 \ => y' = \frac{-12}{6} = -2$ et $\delta_2 = x' + iy' \ => \delta_2 = 6 - 2i$

Alors les racines carrées de Δ $sont$: $\delta_1 = -6 - 2i$ et $\delta_2 = 6 - 2i$

$Z_1 = \frac{(2 + 6i) + (-6 - 2i)}{2(1)} = -2 + 2i$ et $Z_2 = \frac{(2 + 6i) + (6 - 2i)}{2(1)} = 4 + 2i$

$=> S = \{-2 + 2i \ ; \ 4 + 2\}$

2) Soit $P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

a- Montrons que l'équation P(Z) = 0 admet une solution réelle notée Z_0 que l'on Déterminera.

Soit $Z_0 = a$ cette solution réelle telle que :

$Z_0^3 - (4 + 6i)Z_0^2 - (12 - 24i)Z_0 + 32 - 24i = 0$

$\Leftrightarrow (a)^3 - (4 + 6i)(a)^2 - (12 - 24i)(a) + 32 - 24i = 0$

$\Leftrightarrow a^3 - 4a^2 - 6ia^2 - 12a + 24ai + 32 - 24i = 0$

$\Leftrightarrow (a^3 - 4a^2 - 12a + 32) + i(-6a^2 + 24a - 24) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 4a^2 - 12a + 32 = 0 \ (1) \\ -6a^2 + 24a - 24 = 0 \quad (2) \end{cases}$

<u>**NB :**</u> On résous toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation (2) : $-6a^2 + 24a - 24 = 0 \Leftrightarrow -a^2 + 4a - 4 = 0$

$=> \Delta = 16 - 16 = 0 \ => a = 2$

D'où $Z_0 = a = 2$ est la solution réelle

b- Factorisons P(Z) puis résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0

$P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

Factorisons : $Z^3 - 4i\,Z^2 - (6 + i)Z + 3i - 1$

	1	$-4 - 6i$	$-12 + 24i$	$32 - 24i$
2		2	$-4 - 12i$	$-32 + 24i$
	1	$-2 - 6i$	$-16 + 12i$	0

$\boldsymbol{Z_0}$ $\quad \boldsymbol{a}$ $\quad \boldsymbol{b}$ $\quad \boldsymbol{c}$

= > $Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$
⇔ $Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i = (Z - 2)\left[Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i\right]$
D'où P(Z) = 0 ⇔ $(Z - 2)\left[Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i\right]$
⇔ $Z - 2 = 0$ ou $Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i = 0$
= > $Z - 2 = 0$ => $Z_0 = 2$ ou $Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i = 0$
D'après la question 1), la résolution de l'équation $Z^2 - (2 + 6i) - 16 + 12i = 0$ donne pour
Solution $Z_1 = \dfrac{(2 + 6i) + (-6 - 2i)}{2(1)} = -2 + 2i$ et $Z_2 = \dfrac{(2 + 6i) + (6 - 2i)}{2(1)} = 4 + 2i$
Alors l'ensemble solution de l'équation P(Z) = 0 est S = $\{-2 \; ; \; -2 + 2i \; ; \; 4 + 2i\}$

II// Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (o, i, j)
On donne les points A(2), B($4 + 2i$) et C($-2 + 4i$).
1) a- Calculons le rapport $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ puis en déduisons la nature du triangle ABC.

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(-2 + 4i) - (2)}{(4 + 2i) - (2)} = \frac{-2 + 4i - 2}{4 + 2i - 2} = \frac{-4 + 4i}{2 + 2i} = \frac{-2 + 2i}{1 + i} = \frac{(-2 + 2i)(1 - i)}{2} = \frac{4i}{2} = 2i$$

=> $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ est un imaginaire pur. Alors le triangle ABC est rectangle en A.

b-Montrons que le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$
F est milieu du segment $[AC]$ si $x_F = 0$ et $y_F = 2$
$x_F = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{2 - 2}{2} = 0$ et $y_F = \dfrac{0 + 4}{2} = 2$
D'où le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$
c-Déterminons (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe Z vérifiant :
$|Z - 4 - 2i| = |Z + 2 - 4i|$

Posons : $\begin{cases} Z_D - 4 - 2i = 0 \\ \text{et} \\ Z_E + 2 - 4i = 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} Z_D = 4 + 2i \\ \text{et} \\ Z_E = -2 + 4i \end{cases}$ => $\begin{cases} D\binom{4}{2} \\ \text{et} \\ E\binom{-2}{4} \end{cases}$

Alors L'ensemble (Δ) des points M cherché est la médiatrice du segment $[DE]$
2) Soit S la similitude du plan telle que $S(A) = A$ et $S(B) = C$.
a- Déterminons le rapport k et l'angle θ de la similitude S
La traduction schématique d'une similitude directe S qui transforme A en A et B en C est :

S

A	A
B	C
[AB]	[AC]

Rapport $k = \dfrac{[AC]}{[AB]} = \left|\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = \left|\dfrac{(-2 + 4i) - (2)}{(4 + 2i) - (2)}\right| = \dfrac{|-4 + 4i|}{|2 + 2i|} = \dfrac{\sqrt{16 + 16}}{\sqrt{4 + 4}} = \sqrt{2}$

- Angle $\theta = arg\left(\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = arg\left(\dfrac{-4 + 4i}{2 + 2i}\right) = arg\,(2i) = \dfrac{\pi}{2}$

b- Détermine l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S.
L'écriture complexe f associée à S est : $f(Z) = aZ + b$.
La traduction algébrique d'une similitude directe S qui transforme A en C et B en D est :
$S(A) = A$ et $S(B) = C \Leftrightarrow \begin{cases} aZ_A + b = Z_A & (1) \\ aZ_B + b = Z_C & (2) \end{cases}$ on a : (1) – (2) => $a(Z_A - Z_B) = Z_A - Z_C$
=> $a = \frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B} = \frac{-4+4i}{2+2i} = 2i$. Dans (2) on a: $aZ_B + b = Z_C$ => $b = Z_C - aZ_B$

=> $b = (-2+4i) - (2i)(4+2i)$ => $b = 2 - 4i$. D'où $f(Z) = 2iZ + 2 - 4i$
c- En déduisons l'affixe du centre Ω de S.
Soit ω l'affixe du centre de Ω tel que : $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2-4i}{1-(2i)} = \frac{10}{(1)^2+(2)^2} = \frac{10}{5} = 2$

Exercice 2……………….………………………………………(5 *points*)

I//Soit (u_n), $n \in \mathbb{N}$, une suite arithmétique de raison r ($r \neq 0$).
On définit la suite (v_n), $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$.
a- Montrons que (v_n), est une suite géométrique dont on Déterminera la raison et le premier terme v_0(on Exprimera v_0 en fonction de u_0).
On a : $v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$.
Alors (v_n), est une suite géométrique si et seulement si : $v_{n+1} = qv_n$ ou $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$
$v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}$ => $v_{n+1} = \frac{1}{4}e^{-2U_{n+1}}$.

Alors on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{4}e^{-2U_{n+1}}}{\frac{1}{4}e^{-2U_n}} = \frac{e^{-2U_{n+1}}}{e^{-2U_n}} = e^{-2U_{n+1}} \times e^{2U_n} = e^{-2U_{n+1}+2U_n}$

=> $\frac{v_{n+1}}{v_n} = e^{-2(U_{n+1} - U_n)}$

Or d'après l'hypothèse, u_n est une suite arithmétique de raison$r$, par conséquent on a :
$U_{n+1} - U_n = r$. D'où $\frac{v_{n+1}}{v_n} = e^{-2(U_{n+1} - U_n)} = e^{-2r}$
Alors (v_n), est une suite géométrique de raison $q = e^{-2r}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{4}e^{-2U_0}$.

b- Etudions suivant les valeurs de r la convergence de la suite v_n

Pour cela, exprimons v_n en fonction de n.
L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q est:

$v_n = v_0(q)^n \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_0}(e^{-2r})^n = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr}$ => $v_n = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr}$

Ainsi pour étudier la convergence suivant les valeurs de r , on cacule la limite de v_n en $+\infty$.
- Pour $r > 0$; on a :

$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times e^{-2nr} = \frac{1}{4}e^{-2U_0} \times (0) = 0$

- Pour $r < 0$; on a :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4} e^{-2U_0} \times e^{-2nr} = \frac{1}{4} e^{-2U_0} \times (+\infty) = 0$$

- Pour $r = 0$; on a :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4} e^{-2U_0} \times e^{-2nr} = \frac{1}{4} e^{-2U_0}$$

2) Soit w_n $n \in \mathbb{N}$, la suite définie par $w_n = \int_0^n \frac{1}{4} e^{-2x} dx$.

a- Calculons w_n en fonction de n.

$$w_n = \int_0^n \frac{1}{4} e^{-2x} dx = \frac{1}{4} \int_0^n e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{8} \int_0^n -2e^{-2x}\, dx$$

$$\Rightarrow w_n = \left[-\frac{1}{8} e^{-2x}\right]_0^n = -\frac{1}{8} e^{-2n} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2n} = \frac{1}{8}(1 - e^{-2n})$$

D'où $w_n = \frac{1}{8}(1 - e^{-2n})$

b- Montrons que w_n converge vers un nombre réel l que l'on précisera.
Pour cela, on calcule la limite de w_n en $+\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{8}(1 - e^{-2n}) = \frac{1}{8}(1 - 0) = \frac{1}{8}$$

D'où w_n converge vers le réel $= \frac{1}{8}$.

c- On pose $S_n = w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n - \frac{n}{8}$.

Calculons S_n en fonction de n puis en déduis $\lim_{n \to +\infty} S_n$

Posons $S'_n = w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} S'_n - \frac{n}{8}.$$

Ainsi exprimons S'_n en fonction de n.

On sait que : $w_n = \frac{1}{8}(1 - e^{-2n}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2n}$

$\Rightarrow w_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2}$

$w_2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-4}$

$w_3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-6}$

. .
. .
. .

$w_n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2n}$

En effectuant membre à membre la somme des termes de l'égalité ci-dessus, on a :
$w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_n = n \times \frac{1}{8} - n\frac{1}{8}e^{-2n} \Leftrightarrow S'_n = \frac{n}{8} - \frac{n}{8}e^{-2n}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S'_n - \frac{n}{8} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{8} - \frac{n}{8}e^{-2n}\right) - \frac{n}{8} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{8} - \frac{n}{8}e^{-2n} - \frac{n}{8}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{n}{8}e^{-2n} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{8} \times \frac{n}{e^{2n}} = -\frac{1}{8} \times (0) = 0$$

II// Deux tireurs A et B font feu simultanément sur une cible.

- Soit $p(A) = \frac{4}{5}$; la probabilité que le tireur A touche la cible
- Soit $p(B) = \frac{3}{4}$; la probabilité que le tireur A touche la cible

Calculons la probabilité des évènements suivants :

1) Les deux tireurs touchent tous deux la cible.

$$p(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{54} = 0{,}6$$

2) Les deux tireurs manquent la cible.

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathrm{P}(\bar{A}) \times \mathrm{P}(\bar{B}) = \left(1 - \mathrm{P}(A)\right) \times \left(1 - \mathrm{P}(B)\right) = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

3) La cible est atteinte par le tireur A seulement.

$$p(A \cap \bar{B}) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(\bar{B}) = \mathrm{P}(A) \times \left(1 - \mathrm{P}(B)\right) = \frac{4}{5} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

4) La cible est atteinte par un tireur seulement.

$$p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A}) \times p(B) = \frac{1}{5} + \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

5) La cible est atteint (C'est –à-dire par un tireur ou par deux tireurs).
$$p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{7}{20} = \frac{19}{20} = 0{,}95$$

6) La cible soit manquée (C'est-à-dire par les deux tireurs).

$$p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}28$$

Problème…………………………..………..……………………$(\boldsymbol{10\ points})$

Partie A : Résolution de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_1})$: $y' - 2y = xe^x$
1) Résolvons l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_2})$: $y' - 2y = 0$
On a $(\boldsymbol{E_2})$: $y' - 2y = 0$ => S $= ke^{2x}$
2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.
a- Déterminons a et b pour que u soit solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$**.**
u est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $u^{'}(x) - 2u(x) = xe^x$ avec
$u(x) = (ax + b)e^x$ et $u'(x) = (ax + a + b)e^x$.
$u^{'}(x) - 2u(x) = xe^x \Leftrightarrow (ax + a + b)e^x - 2(ax + b)e^x = xe^x \Leftrightarrow$
$[(ax + a + b) - 2(ax + b)]e^x = xe^x \Leftrightarrow (ax + a + b) - 2(ax + b) = x \Leftrightarrow$
$-ax + a - b = x \Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -1 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$
D'où $u(x) = -(x + 1)e^x$
b- Montrons qu'une fonction v est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$**.**
NB :
Montre que $\Leftrightarrow B$, revient à montré que $\begin{cases} A \Rightarrow B \\ \quad et \\ B \Rightarrow A \end{cases}$
Ainsi pour Montre qu'une fonction v est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$, on montre que

$$\begin{cases} v \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E_1}) \Rightarrow u - v \text{ est solution de } (\boldsymbol{E_2}) \\ \qquad\qquad et \\ u - v \text{ est solution de } (\boldsymbol{E_2}) \Rightarrow v \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E_1}) \end{cases}$$

- Montrons que v est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1}) \Rightarrow u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$
  - u est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $u^{'}(x) - 2u(x) = xe^x$ **(1)**
  - v est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $v^{'}(x) - 2v(x) = xe^x$ **(2)**

Effectuons ainsi la différence des relations **(1)** et **(2)** :
(1) $-$ **(2)** : $[u^{'}(x) - v^{'}(x)] - 2[u(x) - v(x)] = xe^x - xe^x$
$\Leftrightarrow (u - v)^{'}(x) - 2(u - v)(x) = 0 \Rightarrow u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$
D'où v est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1}) \Rightarrow u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$
- Montrons que $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2}) \Rightarrow v$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$

Si $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$ alors on a : $(u - v)^{'}(x) - 2(u - v)(x) = 0 \Leftrightarrow$
$[u^{'}(x) - v^{'}(x)] - 2[u(x) - v(x)] = 0 \Leftrightarrow u^{'}(x) - v^{'}(x) - 2u(x) + 2v(x) = 0 \Leftrightarrow$
$v^{'}(x) - 2v(x) = u^{'}(x) - 2u(x)$. Avec $u(x) = -(x + 1)e^x$ et $u^{'}(x) = -(x + 2)e^x$.
Alors $v^{'}(x) - 2v(x) = u^{'}(x) - 2u(x) \Leftrightarrow$
$v^{'}(x) - 2v(x) = [-(x + 2)e^x] - 2[-(x + 2)e^x] \Leftrightarrow v^{'}(x) - 2v(x) = xe^x$
D'où $u - v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2}) \Rightarrow v$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$

Conclusion : puisque $\begin{cases} v \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E_1}) \ => \ u - v \text{ est solution de } (\boldsymbol{E_2}) \\ et \\ u - v \text{ est solution de } (\boldsymbol{E_2}) => v \text{ est solution de l'équation } (\boldsymbol{E_1}) \end{cases}$

Alors une fonction v est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ si et seulement si $u - \ v$ est solution de $(\boldsymbol{E_2})$**.** (Ce qu'il fallait Démontre).

c- En déduisons l'ensemble des solutions de $(\boldsymbol{E_1})$**.**

- On sait que $u(x) - \ v(x)$ est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_2})$
- D'autre part ke^{2x} est aussi solution de l'équation $(\boldsymbol{E_2})$

Par identification, on a : $u(x) - \ v(x) = ke^{2x}$ => $v(x) = \ u(x) - \ ke^{2x}$.
Or $u(x) = -(x+1)e^x$
=> $v(x) = \ -(x+1)e^x - \ ke^{2x}$
D'où l'ensemble des solutions de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ est $v(x) = \ -(x+1)e^x - \ ke^{2x}$
3) Déterminons la solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ qui s'annule en 0.
La solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ qui s'annule en 0 est définie par $v(0) = 0 \Leftrightarrow k = -1$
D'où la solution de l'équation $(\boldsymbol{E_1})$ qui s'annule en 0 est $v(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur ℝ par $g(x) \ = 2e^x - x - 2$.
1) Déterminons la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2e^x - x - 2 = 2\,(0) - (-\infty) - 2 = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2e^x - x - 2 = \lim_{x \to +\infty} x\left(2\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x}\right) = (+\infty)[2(+\infty) - 1 - 0]$$
$= (+\infty)(+\infty) = +\infty$

2) Etudions le sens de variation de g
$g(x) = 2e^x - x - 2$ => $g'(x) = 2e^x - 1$. Posons $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 > 0$ =>
$e^x > \frac{1}{2}$ => $x > ln\frac{1}{2}$ => $x > -ln2$.
Ainsi : pour les $x > -ln2$, on a : $g'(x) > 0$ et pour les $x < -ln2$, on a : $g'(x) < 0$
D'où $\forall\, x \in \,]-\infty\,; -ln2[\,;$ g est strictement décroissante et
$\forall\, x \in \,]-ln2\,; +\infty[\,;$ g est strictement croissante
Dressons le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		α		$-ln2$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$			0			$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-1+ln2$	↗	0	↗	$+\infty$

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
a-Vérifions que 0 est l'une de ces solutions.
$g(x) = 2e^x - x - 2$ => $g(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 2 - 2 = 0$
D'où 0 est l'une de ces solutions de l'équation $g(x) = 0$.

b-L'autre solution est appeléeα. Montrons que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.
- D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in]-\infty\,; -ln2[$; g est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]-\infty\,; -ln2[$; vers$]-1+ln2\,;+\infty\,[$. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution α telle que $g(\alpha) = 0$.
- De plus $\begin{cases} g(-1,6) = 0,003 \\ g(-1,5) = -0,05 \end{cases}$ => $g(-1,6) \times g(-1,5) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une deuxième solution α tel que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.
4) Déterminons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.
D'après le tableau de variation :
- $\forall x \in]-\infty\,; \alpha[\cup]0\,;+\infty[\,; g(x) > 0$.
- $\forall x \in]\alpha\,;\, 0\,[\,;\, g(x) < 0$.

<u>Partie C</u> : Etude de la fonction principale
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)\,e^x$
1) Déterminons la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur).
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} - (x+1)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} - xe^x - e^x = 0 - 0 - 0 = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - (x+1)\,e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}\left[1 - \frac{(x-1)}{e^x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}(1-0) = +\infty$
2) Calculons $f\,'(x)$ et Montre que $f\,'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
$f(x) = e^{2x} - (x+1)\,e^x$ => $f'(x) = 2e^{2x} - [e^x + (x+1)\,e^x\,] = 2e^{2x} - e^x - (x+1)\,e^x$
=> $f'(x) = 2e^{2x} - e^x - (x+1)\,e^x = e^x(2e^x - 1 - x - 1) = e^x \times g(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}\,;\, e^x > 0$. Alors $f\,'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Or d'après **<u>Partie B</u>** 4), on a :
- $\forall x \in]-\infty\,; \alpha[\cup]0\,;+\infty[\,; g(x) > 0$ => $\forall x \in]-\infty\,; \alpha[\cup]0\,;+\infty[\,; f'(x) > 0$
- $\forall x \in]\alpha\,;\, 0\,[\,;\, g(x) < 0$ => $\forall x \in]\alpha\,;\, 0\,[\,;\, f'(x) < 0$

Etudions le sens de variation de f.
- $\forall x \in]-\infty\,; \alpha[\cup]0\,;+\infty[\,; f$ est strictement croissante.
- $\forall x \in]\alpha\,;\, 0\,[\,;\, f$ est strictement décroissante.

3) Montrons que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la **partie B**.
D'après **<u>Partie B</u>** 3) b), on a : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2e^\alpha - \alpha - 2 = 0$ => $e^\alpha = \frac{\alpha+2}{2}$
D'autre part $f(x) = e^{2x} - (x+1)\,e^x \Leftrightarrow f(\alpha) = (e^x)^2 - (\alpha+1)\,e^\alpha$.
Or $e^\alpha = \frac{\alpha+2}{2}$ => $f(\alpha) = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2 - (\alpha+1) \times \frac{\alpha+2}{2} = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$
$= \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{4} - \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 2}{2} = \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 4 - 2\alpha^2 - 6\alpha - 4}{4}$
$= \frac{-\alpha^2 - 2\alpha}{4} = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$. => $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$. (Ce qu'il fallait Démontre)
En déduisons un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$).

$-1{,}6 \leq \ \alpha \ \leq -1{,}5$

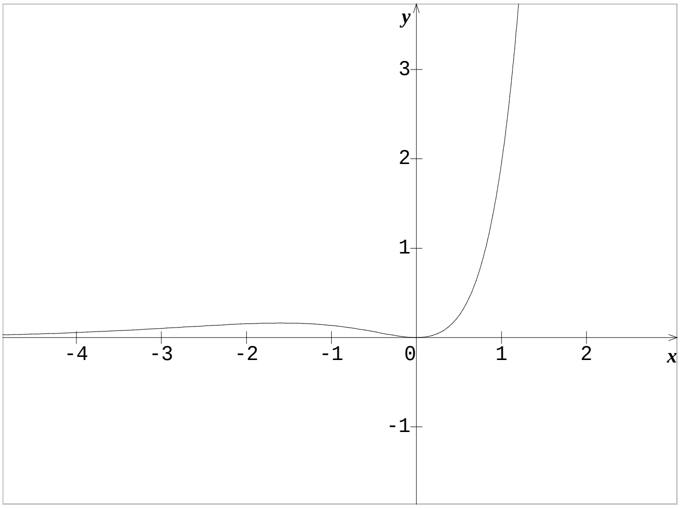
$\Leftrightarrow \ f(-1{,}6) \ \leq \ f(\alpha) \ \leq \ f(-1{,}5)$

$\Leftrightarrow 0{,}32 \ \leq \ f(\alpha) \ \leq 0{,}37$

1) Etablissons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) Traçons la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal



Partie D : Calcul d'aire

1) Soit m un réel négatif, Interprétons graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)dx$

La fonction f est positive sur $[m\,; 0]$donc l'intégrale$\int_m^0 f(x)dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x \ = \ m$ et $x \ = \ 0$.

2) a-Calculons $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

$\int_m^0 xe^x dx$

Posons $u(x) = x$ => $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x$ => $v(x) = e^x$

=> $\int_m^0 xe^x dx = [xe^x]_m^0 - \int_m^0 e^x dx = [xe^x - e^x]_m^0 = (1-m)e^m - 1$

b-En déduisons $\int_m^0 f(x)dx$

$\int_m^0 f(x)dx = \int_m^0 \left[e^{2x} - (x+1)\, e^x\right]dx = \int_m^0 e^{2x}dx - \int_m^0 xe^x dx - \int_m^0 e^x dx$

=> $\int_m^0 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_m^0 - [xe^x - e^x]_m^0 - [e^x]_m^0 = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_m^0 - [xe^x - e^x]_m^0 - [e^x]_m^0$

=> $\int_m^0 f(x)dx = \dfrac{-e^{2m} + 2me^m + 1}{2}$

3) Calculons la limite de $\int_m^0 f(x)dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.

$$\lim_{m \to -\infty} \int_m^0 f(x)dx = \lim_{m \to -\infty} \frac{-e^{2m} + 2me^m + 1}{2} = \frac{-(0) + 2(0) + 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

D'où $\lim_{m \to -\infty} \int_m^0 f(x)dx = \frac{1}{2}$

Bac. Session de Juin 2008

Exercice 1 : ……………………...……………..………………..…….(05 pts)

Un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 à été piqué de telle sorte que les six faces ne sont pas équiprobables. On note P_n la probabilité d'obtenir le chiffre n lors d'un lancé de dé avec $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

D'autre part les nombres P_1 ; P_2; P_3; P_4; P_5 et P_6 dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique et que $P_1 \times P_4 = (P_2)^2$.

1) Calculer la probabilité d'apparition de chaque numéro.
2) On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :

A: ≪ Le nombre obtenu est pair ≫.

B: ≪ Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 ≫.

a- Calculer la probabilité de chacun des évènements A et B.

b- Calculer la probabilité pour que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair.

c- Les évènements A et B sont t-ils indépendants ?

3) On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :

- D'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires.
- D'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé :

- S'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1.
- S'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet évènement.

a- Calculer la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne U_1 puis en déduire la probabilité de l'évènement $G \cap A$. Déterminer ensuite la probabilité de l'évènement G.

b- Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

Exercice 2 : ……………...……………………..………………..…….(05 pts)

Après les élections présidentielles au Mali, l'analyse des résultats a montré que le candidat élu avait obtenu v_1 voies, le 2^{e} avait obtenu v_2 voies, ainsi de suite jusqu'au dernier des n candidats qui avait obtenu v_n voies. De plus on a constaté que le $k^{ième}$ candidat avec ($k \geq 1$) avait obtenu le double de voies de son successeur immédiat $(k+1)^{ième}$ du classement ; définissant ainsi une suite numérique $(v_n)_{n\,\geq 1}$

1) Prouver que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q. **(1 pt)**

2) Le nombre total de votants appelé suffrage exprimé est : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots. + v_{n-1}$.

Un candidat est élu président dès le 1er tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n.

a) Déterminer en fonction de n et v_1 le suffrage exprimé S_n. **(1 pt)**

b) Examiner si un deuxième tour à cette élection eut été nécessaire. **(1 pt)**

3) En effet le nombre total des votants fut 945 et le candidat fut élu par ses 480 voies. Déterminer alors le nombre n de candidats qui avaient postulés. **(1 pt)**

Problème : **………….....……………….…………………………………….(10 pts)**

Un échantillon de sang prélevé sur un individu, contient une certaine quantité de globules (rouges et blancs) dont le rythme de croissance est modélisé par la fonction $R(t) = \frac{3000}{1+0,25t}$.
Où t est le temps écoulé en jours.
On admet que ce rythme de croissance est la dérivée de la fonction population $P(t)$ de globules c'est-à-dire que $P'(t) = R(t)$ et au temps $t = 0$, l'échantillon compte 1000 globules c'est-a-dire : $P(0) = 1000$.

1) a- Déterminer $P(t)$ désignant la population de globules après t jours. **(1 pt)**
b- Evaluer le nombre de globules présent dans l'échantillon au bout de 72 heures. **(1 pt)**
c- Après combien de jours le nombre de globules atteindra t-il 12000 ? **(1 pt)**

2) a- Etudier le sens de variation de $P(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$. **(1 pt)**
b- Calculer la limite de $P(t)$ en $+\infty$. **(1 pt)**

3) On donne la fonction H définie sur $[0\,;\ +\infty[$ par :
$H(t) = 48000(1 + 0,25t)ln(1 + 0,25t) - 11000t$
a- Montrer que H est une primitive de Psur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$. **(1 pt)**
b- Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \int_5^{10} P(t)\mathrm{d}t$ puis en déduire une interprétation concrète du résultat. **(1 pt)**

c- Calculer le nombre moyen de globules entre le $5^{\text{ième}}$ et le $10^{\text{ième}}$ jour. **(1 pt)**

4) En effet l'échantillon comporte $\frac{1}{3}$ de globules blancs et $\frac{2}{3}$ de globules rouges. Une infection frappe 6% de globules blancs et 0,36% de globules rouges.
Quelle est la probabilité pour qu'un globule pris au hasard (dont on ignore la couleur) soit infecté ? **(2 pt)**

Correction Bac 2008

Exercice 1 : ………………..…………………………………………….(05 pts)

1) Calculons la probabilité d'apparition de chaque numéro.

Soit r la raison de cette suite telle que :

$P_2 = P_1 + r$

$P_3 = P_2 + r = P_1 + r + r = P_1 + 2r$

$P_4 = P_3 + r = P_1 + 2r + r = P_1 + 3r$

$P_5 = P_4 + r = P_1 + 3r + r = P_1 + 4r$

$P_6 = P_5 + r = P_1 + 4r + r = P_1 + 5r$

On sait que : $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$ (Car$\sum P_i = 1$) $(\mathbf{1})$

D'autre part : $P_1 \times P_4 = (P_2)^2$. $(\mathbf{2})$

- La relation $(\mathbf{1})$ donne :

$P_1 + (P_1 + r) + (P_1 + 2r) + (P_1 + 3r) + (P_1 + 4r) + (P_1 + 5r) = 1 \Leftrightarrow$
$6P_1 + 15\text{r} = 1$ $(\mathbf{1})$

- La relation $(\mathbf{2})$ donne :

$P_1 \times (P_1 + 3r) = \left(P_1 + r\right)^2 \Leftrightarrow P_1^2 + 3r\,P_1 = P_1^2 + 2r\,P_1 + r^2 \Leftrightarrow r^2 - r\,P_1 = 0 \Leftrightarrow$

$r(r - P_1) = 0 \Rightarrow r = 0\ (impossible)$ ou $r = P_1$

D'où le système $\begin{cases} r = P_1 \\ 6P_1 + 15r = 1 \end{cases}$

De ce système on a : $6P_1 + 15\,P_1 = 1 \Leftrightarrow 21P_1 = 1 \Rightarrow P_1 = \frac{1}{21}$

$P_2 = P_1 + r = P_1 + P_1 = 2P_1 = 2 \times \frac{1}{21} = \frac{2}{21}$

$P_3 = P_2 + r = 2P_1 + P_1 = 3P_1 = 3 \times \frac{1}{21} = \frac{3}{21}$

$P_4 = 4P_1 = 4 \times \frac{1}{21} = \frac{4}{21}$

$P_5 = 5P_1 = 5 \times \frac{1}{21} = \frac{5}{21}$

$P_6 = 6P_1 = 6 \times \frac{1}{21} = \frac{6}{21}$

D'où le tableau de la loi de probabilité est le suivant :

n	1	2	3	4	5	6
P_n	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

2) On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :

A: ≪ Le nombre obtenu est pair ≫.

B: ≪ Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 ≫.

a- Calculons la probabilité de chacun des évènements A et B.

$P(A) = P_2 + P_4 + P_6 = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

$P(B) = P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$

b- Calculons la probabilité pour que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair.

$P(B/A) = P_4 + P_6 = \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{10}{21}$

c- Vérifions si les évènements A et B sont indépendants

Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) \neq\ P(B/A) \times P(A)$

On sait que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{4}{7} \times \frac{6}{7} = \frac{24}{49}$ et $P(B/A) \times P(A) = \frac{10}{21} \times \frac{4}{7} = \frac{40}{147}$

Puisque $P(A \cap B) \neq\ P(B/A) \times P(A)$. Alors les évènements A et B sont indépendants

3) On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :

- D'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires.
- D'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé :

- S'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1.
- S'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet évènement.

a- Calculons la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne U_1

- Si l'urne U_1 contient 1 boule blanche et 3 boules noires alors le total de boule dans l'urne U_1 est 4 et par conséquent on a : $\frac{1}{4}$ de boules blanches et $\frac{3}{4}$ de boules noires.
- De même Si l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire alors le total de boule dans l'urne U_2 est 3 et par conséquent on a : $\frac{2}{3}$ de boules blanches et $\frac{1}{3}$ de boules noires.

Or tirer une boule blanche équivaut à un gagnant. Donc $P(G/A) = \frac{1}{4}$

En déduisons la probabilité de l'évènement $G \cap A$.

$P(G \cap A) =\ P(G/A) \times P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$ => $P(G \cap A) = \frac{1}{7}$

Déterminons ensuite la probabilité de l'évènement G.

$P(G) =\ P(G \cap A) + P(G \cap \bar{A})$

Or si A est l'évènement : ≪ Le nombre obtenu est pair ≫

Alors $\bar{A}$ est l'évènement : ≪ Le nombre obtenu est impair ≫.

=> $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$

D'autre part $P(G \cap \bar{A}) = P(G/\bar{A}) \times P(\bar{A})$

Or $P(G/\bar{A}) = \frac{2}{3}$ $(Gagnant\ dans$ l'urne U_2)

D'où $P(G) =\ \frac{1}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{7} =\ \frac{1}{7} + \frac{2}{7} =\ \frac{3}{7}$ => $P(G) =\ \frac{3}{7}$

b- Le joueur est gagnant. Déterminons la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé. $P(A/G) =\ \frac{P(A/G)}{P(G)} =\ \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} =\ \frac{1}{3}$

<u>Exercice 2</u> : ……………………………………………………………(04 pts)

1) Prouvons que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q.
D'après les renseignements ci-dessus, on a : $v_1 = 2v_2$; $v_2 = 2v_3$; $v_3 = 2v_4$ et de manière générale,on a : $v_n = 2v_{n+1} \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$
D'où v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme v_1.
2) Le nombre total de votants appelé suffrage exprimé est : $v_0 + v_1 + \ldots.. + v_{n-1}$.
Un candidat est élu président dès le 1er tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n où S_n désigne le suffrage exprimé.

a-Déterminons en fonction de n et v_1 le suffrage exprimé S_n.
Ici, le suffrage exprimé S_n désigne la somme des n premiers termes de la suite géométrique de 1er terme v_1 et de raison $q = \frac{1}{2}$
Alors $S_n = \frac{v_1(1-q^n)}{1-q} \Leftrightarrow S_n = \frac{v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{1}{2}} = 2v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$
D'où le suffrage exprimé S_n en fonction de n est : $S_n = 2v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$
b-Examinons si un deuxième tour à cette élection eut été nécessaire.
Par hypothèse, candidat est élu président dès le 1er tour, lorsque son nombre de voies v_1 dépasse la moitié de S_n où S_n désigne le suffrage exprimé c'est-à-dire : $v_1 > \frac{1}{2}S_n \Leftrightarrow$
$v_1 - \frac{1}{2}S_n > 0$
Ainsi étudions le signe de $v_1 - \frac{1}{2}S_n$.
$v_1 - \frac{1}{2}S_n = v_1 - \frac{1}{2}\left(2v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right) = v_1 - v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = v_1 - v_1 + \frac{1}{2^n}v_1 = \frac{1}{2^n}v_1$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{2^n} > 0$ et $v_1 > 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_1 - \frac{1}{2}S_n > 0 \Rightarrow v_1 > \frac{1}{2}S_n$.
Puisque $v_1 > \frac{1}{2}S_n$, alors le candidat est élu président dès le 1er tour.

3) En effet le nombre total des votants fut 945 et le candidat fut élu par ses 480 voies.
Déterminons alors le nombre n de candidats qui avaient postulés.
Par hypothèse : $S_n = 945$ et $v_1 = 480$.
En remplaçant $S_n = 945$ et $v_1 = 480$ par leur valeur dans $S_n = 2v_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$, on a :
$945 = 2 \times 480\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \Leftrightarrow 945 = 960\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{945}{960} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{945}{960}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{15}{960} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^6} \Rightarrow n = 6$

Alors on en déduit qu'il y-avait $n = 6$ candidats comme postulant.

<u>Problème</u> : ……………………………………………………………(10 pts)

Un échantillon de sang prélevé sur un individu, contient une certaine quantité de globules (blancs et rouges) dont le rythme de croissance est modélisé par : $R(t) = \frac{3000}{1+0{,}25t}$
La population de globules est telle que : $P'(t) = R(t)$
D'autre part on donne : $P(0) = 1000$

1) a- Déterminons $P(t)$ désignant la population de globules après t jours.

$$P'(t) = R(t) \Leftrightarrow P(t) = \int R(t)dt = \int \frac{3000}{1+0,25t}dt = \frac{3000}{0,25}\int \frac{0,25}{1+0,25t}dt = 12000\int \frac{0,25}{1+0,25t}dt$$

=> $P(t) = 12000ln(1 + 0,25t) + k$. Or $P(0) = 1000$ => $k = 1000$
D'où $P(t) = 12000ln(1 + 0,25t) + 1000$
b- Evaluons le nombre de globules au bout de 72 heures.
72 heures→ 3 $jours$. Alors calculons $P(3)$

$P(3) = 12000ln(1 + 0,25 \times 3) + 1000 = 7\,715,38 \approx 7\,715$ globules.

c- Déterminons le nombre de jours nécessaire pour atteindre 12000 globules.

Pour cela résolvons l'équation $P(t) = 12000 \Leftrightarrow 12000ln(1 + 0,25t) + 1000 = 12000$

$\Leftrightarrow 12000ln(1 + 0,25t) = 12000 - 1000 \Leftrightarrow 12000ln(1 + 0,25 \times 3) = 11000$

$\Leftrightarrow ln(1 + 0,25t) = \frac{11000}{12000} \Leftrightarrow ln(1 + 0,25t) = \frac{11000}{12000} \Leftrightarrow ln(1 + 0,25t) = 0,91$

$\Leftrightarrow 1 + 0,25t = e^{0,91} \Leftrightarrow 1 + 0,25t = 2,48 \Leftrightarrow 0,25t = 1,481$ => $t = 5,92 \approx 6$

Alors il faut 6 jours pour atteindre 12000 globules.

2) a- Etudions le sens de variation de $P(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
$P(t) = 12000ln(1 + 0,25t) + 1000$ => $P^{'}(t) = R(t) = \frac{3000}{1+0,25t} > 0\ \forall t \in [0\,;\,+\infty[$.
D'où $\forall t \in [0\,;\,+\infty[, p$ est strictement croissante.

b- Calculons la limite de $P(t)$ en $+\infty$.
$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} 12000ln(1 + 0,25t) + 1000 = +\infty$

3) On donne la fonction H définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$H(t) = 48000(1 + 0,25t)ln(1 + 0,25t) - 11000t$

a- Montrons que H est une primitive de Psur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

H est une primitive de P si et seulement si $H'(t) = P(t)$

$H(t) = 48000(1 + 0,25t)ln(1 + 0,25t) - 11000t$

=> $H(t) = (48000 + 12000t)ln(1 + 0,25t) - 11000t$

=> $H'(t) = 12000ln(1 + 0,25t) + \frac{0,25}{1+0,25t}48000(1 + 0,25t) - 11000$

=> $H'(t) = 12000ln(1 + 0{,}25t) + \frac{12000\,(1+0{,}25t)}{1+0{,}25t} - 11000$

=> $H'(t) = 12000ln(1 + 0{,}25t) + 12000 - 11000$

=> $H'(t) = 12000ln(1 + 0{,}25t) + 1000 = P(t)$

D'où H est une primitive de P

b- Calculons l'intégrale $\mathrm{I} = \int_5^{10} P(t)\mathrm{d}t$

$\mathrm{I} = \int_5^{10} P(t)\mathrm{d}t$ => $\mathrm{I} = [H(t)]_5^{10} = H(10) - H(5) = (100464{,}17) - (32580{,}46)$

=> $\mathrm{I} = 67883{,}71$

Ainsi I est l'espace occupé en cm^2 par les globules entre le 5ième et le 10ième jour.

c- Calculons le nombre moyen de globules entre le 5ième et le 10ième jour.

$m = \frac{1}{10-5}\int_5^{10} P(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\int_5^{10} P(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{5} \times 67883{,}71 = 0{,}2 \times 67883{,}71 = 13576{,}74$

=> $m \approx 13577$

Alors le nombre moyen de globules entre le 5ième et le 10ième jour s'évalue à 13577 .

4) Soit $p(b) = \frac{1}{3}$; la probabilité sur le nombre de globules blancs.

Soit $p(r) = \frac{2}{3}$; la probabilité sur le nombre de globules rouges.

Soit A; l'évènement : $\ll$ *être infecté* $\gg$

Soit $p(A)$; la probabilité qu'un globule soit infecté

$p(A/b) = 6\% = \frac{6}{100} = 0{,}06$ et $p(A/r) = 0{,}36\% = \frac{0{,}36}{100} = 0{,}0036$

Déterminons la probabilité pour qu'un globule pris au hasard (dont on ignore la couleur) soit infecté

$b \cup r = \Omega$ et $b \cup r = \emptyset$

Alors $\{b \; ; \; r\}$ forme un système complet d'évènement tel que :

=> $p(A) = p(A \cap b) + p(A \cap r) = p(A/b) \times p(b) + p(A/r) \times p(r)$

$= (0{,}06) \times \frac{1}{8} + 0{,}0036 \times \frac{2}{3} = 0{,}02$ => $p(A) = 0{,}02$

Bac. Session de Juin 2009

Exercice 1……………………………………………………………(5 pts)

I/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^3-\left(4+i\sqrt{3}\right)Z^2+\left(3+4i\sqrt{3}\right)Z-3i\sqrt{3}=0$

1) Montrer que (E) admet deux solutions réelles que l'on notera α et β puis une solution imaginaire pure que l'on notera ω.

2) Soit f, l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout nombre complexe Z, on a :
$f(Z)=aZ+b$.

a-Déterminer les réels a et b pour que $f(\omega)=\omega$ et $f(\alpha)=\beta$.

b-Calculer le module et un argument de a.

c-Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

II/ Un bloc métallique est déposé dans un four dont la température constante est de 1000°C. La température θ est une fonction du temps t $(en\ heures)$ qui vérifie l'équation différentielle (E): $\theta'(t)=k[1000-\theta(t)]$; $k\in\mathbb{R}_+^*$.

1) On pose $y(t)=\theta(t)-1000$.
   Ecris une équation différentielle (F) satisfaite par y.
2) Résous (F) puis (E).
3) Le bloc, initialement à 40°C est déposé dans le four au temps $t_0=0$. Sa température est de 160°C au bout d'une heure. En déduis l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement.
4) a- Calcule la température du bloc au temps $t=3$ heures.
   b- Détermine le temps T à partir duquel la température du bloc dépassera 500°C.
   On donne $\left(\frac{7}{8}\right)^3=0{,}7$; $ln\left(\frac{7}{8}\right)=-0{,}13$; $ln\left(\frac{25}{48}\right)=-0{,}65$

Exercice 2……………………………………………………………(5 pts)

I/ On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_n=1$;
$u_{n+1}=2u_n+1$ et $v_n=u_{n+1}-u_n$

1) Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

3) Soit la somme $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$

Montrer que pour tout entier naturel n, $S_n=u_n-u_0$

Calculer S_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

II/ Dans une population, 30% de personnes sont atteintes d'une affection des voies respiratoires supérieures. Il ya 60% de fumeurs parmi les malades et 10% de fumeurs parmi les personnes non atteintes par cette affection. Calculer la probabilité qu'un fumeur soit atteint de l'affection.

Problème……………………………………………………………(10 pts)

Partie A :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{lnx}{x^2}$, de déterminer ensuite dans la **partie B** la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie (Γ), cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

1) Soit g la fonction numérique définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $g(x)=x^3-x-2\,lnx+1$

a) Montrer que la fonction g est dérivable et que $\forall\ x \in$ Dg $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

b) Etudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.

2) a- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b- Montrer que pour tout $x \in]\ 0\ ;\ +\infty[$, $f\ '(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donner le tableau de variations de la fonction f.

<u>Partie B</u> :

Γ Désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ unité graphique 2 cm.

Soit h la fonction définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ par $h(x)\ =\ x\ +\ ln\, x$.

1) Etudier le sens de variation de h puis montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle[0,4 ; 0,7]

2) Montrer que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$

3) a- Vérifier que la droite Δ d'équation $y\ =\ x$ est asymptote oblique à Γ en $+\infty$.

b- Utiliser les résultats de la question **1)** pour déterminer les positions relatives de Γ et Δ.

4) Construire Γ et Δ dans le repère ortho normal $(o\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

5) a- Calculer au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale I $= \int_1^2 \frac{lnt}{t^2}\,dt$

b- En déduire l'aire, en cm^2 de la portion de plan limitée par la courbe Γ, la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x\ =\ 1\ et\ x\ =\ 2$.

Correction Bac 2009

Exercice 1……………………………………………………………(5 pts)

I/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^3-(4+i\sqrt{3})Z^2+(3+4i\sqrt{3})Z-3i\sqrt{3}=0$

1) Montrons que (E) admet deux solutions réelles que l'on notera α et β puis une solution imaginaire pure que l'on notera ω.

Recherche des solutions réelles :

Soient $\alpha=a_1$, et $\beta=a_2$ les solutions réelles de l'équation (E) telle que :

$a^3-(4+i\sqrt{3})a^2+(3+4i\sqrt{3})a-3i\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow$

$(a^3-4a^2+3a)+i(-a^2\sqrt{3}+4a\sqrt{3}-3\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3-4a^2+3a=0 \\ et \\ -a^2\sqrt{3}+4a\sqrt{3}-3\sqrt{3}=0 \end{cases}$

En utilisant l'équation (2), on a : $-a^2\sqrt{3}+4a\sqrt{3}-3\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow -a^2+4a-3=0$

=> $a_1=1$ ou $a_2=3$

D'où les solutions réelles de l'équation (E) sont telles que : $\alpha=1$ et $\beta=3$

Recherche de la solution imaginaire pure:

Soient $\omega=ib$, la solution imaginaire pure de l'équation (E) telle que :

$(ib)^3-(4+i\sqrt{3})(ib)^2+(3+4i\sqrt{3})(ib)-3i\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow$

$(4b^2-4b\sqrt{3})+i(-b^3+b^2\sqrt{3}+3b-3\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2-4b\sqrt{3}=0 \\ et \\ -b^3+b^2\sqrt{3}+3b-3\sqrt{3}=0 \end{cases}$

En utilisant l'équation (1), on a : $4b^2-4b\sqrt{3}=0=0 \Leftrightarrow b^2-b\sqrt{3}=0$

=> $b_1=0$ (à rejeté) ou $b_2=\sqrt{3}$ (à retenir)

D'où la solution imaginaire pure de l'équation (E) est telle que : $\omega=ib=i\sqrt{3}$

2) Soit f, l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout nombre complexe Z, on a : $f(Z)=aZ+b$.

a-Déterminons les réels a et b pour que $f(\omega)=\omega$ et $f(\alpha)=\beta$.

$\begin{cases} f(\omega)=\omega \\ \text{et} \\ f(\alpha)=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\omega+b=\omega \\ \\ a\alpha+b=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\omega+b=\omega \\ \\ -a\alpha-b=-\beta \end{cases}$

$=> \overline{a\omega-a\alpha=\ \omega-\beta}$

$\Leftrightarrow a(\omega-\alpha)=\omega-\beta => a=\frac{\omega-\beta}{\omega-\alpha} => a=\frac{(i\sqrt{3})-(3\ )}{(i\sqrt{3})-(1)}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{(-3+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}$

$=> a=\frac{6+2i\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} => a=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ainsi en remplaçant $a=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ par sa valeur dans l'équation (1), on a : $b=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b-Calculons le module et un argument de a.

$a=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} => |a|=\sqrt{3}$ et $arg(a)=\frac{\pi}{6}$

c-Donnons la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

$f(Z)=aZ+b$ avec $a=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\in\mathbb{C}-\{-1\,;1\}$ et $b=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\in\mathbb{C}$

Alors la transformation f est une similitude directe dont les éléments caractéristiques sont :

Rapport : $k=|a|=\sqrt{3}$

Angle : $\theta=arg(a)=\frac{\pi}{6}$

Centre : Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}=\frac{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=i\sqrt{3} => \Omega\binom{0}{\sqrt{3}}$

II/Un bloc de métallique est déposé dans un four dont la température constante est de 1000°C. La température θ est une fonction du temps t $(en\ heures)$ qui vérifie l'équation différentielle (E): $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$; $k \in \mathbb{R}_+^*$.

1) On pose $y(t) = \theta(t) - 1000$.

Ecrivons une équation différentielle (F) satisfaite par y.
On a $y(t) = \theta(t) - 1000 \Rightarrow y'(t) = \theta'(t)$. Or $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$
=> $y'(t) = k[1000 - \theta(t)] = 1000k - k\theta(t)$. Or $\theta(t) = y(t) + 1000$
Donc $y'(t) = 1000k - k[y(t) + 1000]$
=> $y'(t) = 1000k - ky(t) - 1000k = -ky(t) \Leftrightarrow y'(t) + ky(t) = 0$
D'où $(\boldsymbol{F})$: $\boldsymbol{y'(t) + ky(t) = 0}$

2) Résolvons (F): $y'(t) + ky(t) = 0$

(F): $y'(t) + ky(t) = 0$
Ainsi la solution générale de (F) est : $t \mapsto y(t) = Ae^{-kt}$; avec $k \in \mathbb{R}$.
D'où $\boldsymbol{y(t) = Ae^{-kt}}$ avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$.

Résolvons (E): $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$
On sait que $y(t) = \theta(t) - 1000 \Rightarrow \theta(t) = y(t) + 1000 \Leftrightarrow \theta(t) = Ae^{-kt} + 1000$
Ainsi la solution générale de (E) est : $t \mapsto \theta(t) = Ae^{-kt} + 1000$; avec $k \in \mathbb{R}$.
D'où $\boldsymbol{\theta(t) = Ae^{-kt} + 1000}$; avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$.

3) En déduisons l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement.

- Le bloc, initialement à 40°C est déposé dans le four au temps $t_0 = 0$.

=> $\theta(0) = 40 \Leftrightarrow Ae^0 + 1000 = 40 \Leftrightarrow A + 1000 = 40 \Rightarrow A = -960$
Donc $\theta(t) = -960e^{-kt} + 1000$

- Sa température est de 160°C au bout d'une heure.

=> $\theta(1) = 160 \Leftrightarrow -960e^{-k} + 1000 = 160 \Leftrightarrow -960\,e^{-k} = -840$
$\Leftrightarrow e^{-k} = \frac{-840}{-960} \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow -k = ln\left(\frac{7}{8}\right)$
D'où l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement est :
$\theta(t) = -960\ e^{tln\left(\frac{7}{8}\right)} + 1000$ ou $\theta(t) = -960\ e^{-tln\left(\frac{8}{7}\right)} + 1000$

4) a- Calculons la température du bloc au temps $t = 3$ heures.

$\theta(3) = -960\ e^{3ln\left(\frac{7}{8}\right)} + 1000 = -960 \times 0{,}7 + 1000 = 328°C$
D'où la température du bloc au bout de 3 heures est $328°C$.

b- Déterminons le temps T à partir duquel la température du bloc dépassera 500°C.

On a : $\theta(t) \geq 500 \Leftrightarrow -960\ e^{tln\left(\frac{7}{8}\right)} + 1000 \geq 500 \Leftrightarrow e^{tln\left(\frac{7}{8}\right)} \leq \frac{500}{960}$
$\Leftrightarrow tln\left(\frac{7}{8}\right) \leq ln\left(\frac{500}{960}\right) \Rightarrow t \geq \frac{ln\left(\frac{500}{960}\right)}{ln\left(\frac{7}{8}\right)}$ car $ln\left(\frac{7}{8}\right) < 0 \Rightarrow t \geq 5$. D'où $T = 5$ heures.
D'où la température du bloc dépassera 500°C au bout de 5 heures.

<u>Exercice 2</u>…………………………………………………………………(5 pts)

I/ On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_n = 1$;
$u_{n+1} = 2u_n + 1$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) Montrons que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

v_n est une suite géométrique si et seulement si : $v_{n+1} = qv_n$ ou $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$

$v_n = u_{n+1} - u_n = (2u_n + 1) - u_n = 2u_n + 1 - u_n = u_n + 1$

=> $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (2u_n + 1) + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1)$ => $v_{n+1} = 2v_n$

D'où v_n est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 2$

2) Exprimons, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

L'expression des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q est :
$v_n = v_0(q)^n$

$v_n = v_0(q)^n \Leftrightarrow v_n = 2(2)^n = 2^{n+1}$

3) Soit la somme $S_n = v_0 + v_1 + \ldots.. + v_{n-1}$

a-Montrons que pour tout entier naturel n, $S_n = u_n - u_0$

On sait que : $v_n = u_{n+1} - u_n$

=>

$v_0 = \cancel{u_1} - u_0$
$v_1 = \cancel{u_1} - \cancel{u_1}$

$v_2 = \cancel{u_3} - \cancel{u_1}$
. . .
. $\cancel{u_{n-1}}$.
. . .
$v_{n-1} = u_n - \cancel{u_{n-1}}$

En ajoutant membre à membre les termes de l'égalité ci-dessus, on a :

$v_0 + v_1 + \ldots.. + v_{n-1} = u_n - u_0 \Leftrightarrow S_n = u_n - u_0$

D'où pour tout entier naturel n, $S_n = u_n - u_0$ (Ce qu'il fallait démontrer).

b-Calculons S_n en fonction de n

La somme des n premiers d'une suite géométrique de 1er terme v_0 et de raison q est :

$S_n = \frac{v_0(1 - q^{n+1})}{1 - q}$

$S_n = \frac{v_0(1 - q^{n+1})}{1 - q} \Leftrightarrow S_n = \frac{2(1 - 2^{n+1})}{1 - 2}$ => $S_n = -2(1 - 2^{n+1})$

En déduisons u_n en fonction de n.

D'après la question a), $S_n = u_n - u_0$ et D'après la question b), $S_n = -2(1 - 2^{n+1})$

Par identification, $u_n - u_0 = -2(1 - 2^{n+1})$ => $u_n = -2(1 - 2^{n+1}) + u_0$. Or $u_0 = 1$

$\Rightarrow u_n = -2(1 - 2^{n+1}) + 1 = -2 + 2 \times 2^{n+1} + 1 = -1 + 2^{n+2}$.

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = -1 + 2^{n+2}$.

II/ Dans une population, 30% de personnes sont atteintes d'une affection des voies respiratoires supérieures. Il ya 60% de fumeurs parmi les malades et 10% de fumeurs parmi les personnes non atteintes par cette affection.
Soit $\mathrm{P}(M) = 30\% = \frac{30}{100} = 0{,}3$ la probabilité de l'évènement $\ll$ *être affectés* $\gg$.
Soit $\mathrm{P}(F/M) = 60\% = \frac{60}{100} = 0{,}6$ la probabilité de l'évènement $\ll$ *être fumeur* $\gg$.
Soit $\mathrm{P}(F/\overline{M}) = 10\% = \frac{10}{100} = 0{,}1$ la probabilité de l'évènement $\ll$ *non affectés* $\gg$.
Calculons la probabilité qu'un fumeur soit atteint de l'affection.
Soit $\mathrm{P}(M/F)$ la probabilité de l'évènement $\ll$ *un fumeur soit atteint de la maladie* $\gg$

telque : $\mathrm{P}(M/F) = \frac{\mathrm{P}(M\cap F)}{\mathrm{P}(F)} = \frac{\mathrm{P}(M) \times \mathrm{P}(F/M)}{\mathrm{P}(M)\times\mathrm{P}(F/M) + \mathrm{P}(\overline{M})\times\mathrm{P}(F/\overline{M})}$

avec $\mathrm{P}(\overline{M}) = 1 - \mathrm{P}(M) = 1 - 0{,}3 = 0{,}72 \Rightarrow \mathrm{P}(M/F) = \frac{0{,}3 \times 0{,}6}{0{,}3\times 0{,}6 + 0{,}7\times 0{,}1} = 0{,}72$

<u>Problème</u>……………………………………………………………(10 pts)

<u>Partie A</u> :
Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur $]\,0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}$, de déterminer ensuite dans la **partie B** la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie (Γ), cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

1) a) Dérivée de la fonction g

La fonction g, définie sur $]\,0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2\,lnx + 1$est dérivable sur $]\,0\ ;\ +\infty[$ (comme somme algébrique de telles fonctions) et sa dérivée est :
$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2 - x - 2)}{x}$

b) Variations de g et signe de $g(x)$.

On peut résumer l'étude du sens de variation de g et du signe de $g(x)$ dans le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$3x^2 + 3x + 2$	‖	$+$		$+$	
$g'(x)$	‖	$-$		$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation, $g(x) > 0$

a) Limite de f en 0 et en $+\infty$

$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2} = +\infty$

b- Montrons que pour tout $x \in]\,0\ ;\ +\infty[\,, f\,'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donnons le tableau de variations de la fonction f.

La fonction f, définie sur $]\,0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}$ est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et sa dérivée est : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1-2lnx}{x^3} = \frac{x^3 - x + 1 - 2lnx}{x^3}$ => $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

$\forall x \in]\,0\ ;\ +\infty[\ ;\ x^3 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

Or d'après **Partie A 1) b)**, on a :

$\forall x \in]0\ ;+\infty[\ ;\ g(x) > 0$ => $\forall x \in]0\ ;+\infty[\ \ f'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

<u>Partie B</u> :

Soit h la fonction définie sur $]\,0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x + ln\,x$.

1) Etudions le sens de variation de h puis montrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle$[\,0{,}4\ ;\ 0{,}7\,]$

La fonction h définie sur$]\,0\ ;\ +\infty[$ est également dérivable$]\,0\ ;\ +\infty[$ et sa fonction dérivée est $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$ =>$\forall x \in]0\ ;+\infty[\ ; h'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de h est le suivant :

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$			
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

- D'après le tableau de variation de h, $\forall x \in]\,0\ ;\ +\infty[\ \ h$ est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]\,0\ ;\ +\infty[$ vers $]-\infty\ ;+\infty[$.

Alors l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $h(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} h(0{,}4) = -0{,}52 \\ h(0{,}7) = 0{,}34 \end{cases}$ => $h(0{,}4) \times h(0{,}7) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $\alpha \in [\,0{,}4\ ;\ 0{,}7\,]$
Conclusion : l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [\,0{,}4\ ;\ 0{,}7\,]$

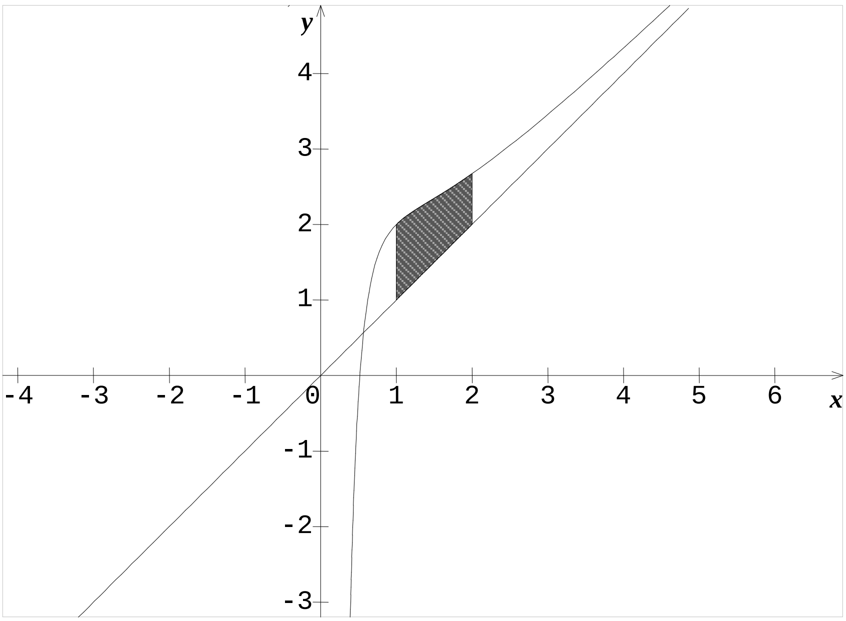
2) Montrons que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$
D'après **Partie B 1)** on a : $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \ln\alpha = 0 \Rightarrow \ln\alpha = -\alpha \Rightarrow e^{-\alpha} = \alpha$
3) a- Vérifions que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à Γ en $+\infty$.
La droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0 = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}\right) - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

D'où La droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$
b- Utilisons les résultats de la **Partie B** question **1)** pour déterminer les positions relatives de (Γ) et Δ.
Pour étudier la position relative (Γ) et (Δ) nous devons étudier le signe de $f(x) - y$.
Or $f(x) - y = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$.
Donc le signe de $f(x) - y$ dépend du signe de $h(x)$.
Or d'après le tableau de variation obtenu dans la **Partie B 1)** on a :
$\forall x \in]\,0\ ;\ \alpha[\ \ h(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]\,0\ ;\ \alpha[\ \ f(x) - y < 0$ et par conséquent $\forall x \in]\,0\ ;\ \alpha[$; la courbe (Γ) est en dessous de la droite (Δ)
De même $\forall x \in]\,\alpha\ ;\ +\infty[\ \ h(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]\,\alpha\ ;\ +\infty[\ \ f(x) - y > 0$ et par conséquent $\forall x \in]\,\alpha\ ;\ +\infty[$; la courbe (Γ) est au dessus de la droite (Δ)

4) Construction de la courbe (Γ) et de la droite Δ dans le repère ortho normal $(o\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$



5) a- Calculons au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale I $= \int_1^2 \frac{lnt}{t^2} dt$

I $= \int_1^2 \frac{lnt}{t^2} dt = \int_1^2 \frac{1}{t^2} lnt\ dt$

Posons $u(t) = lnt$ => $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{t^2}$ => $v(t) = -\frac{1}{t}$

=> I $= \left[-\frac{lnt}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{lnt}{t}\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \left[-\frac{lnt}{t} - \frac{1}{t}\right]_1^2 = \left[-\frac{1+lnt}{t}\right]_1^2$

=> I $= \frac{1-ln2}{2}$

b- En déduisons l'aire, en cm^2 de la portion de plan limitée par la courbe (Γ) , la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1\ et\ x = 2$.

L'aire A de la portion de plan indiquée est, en cm^2, puisque (Γ) est au dessus de (Δ) et puisque (Δ) est au dessus de l'axe des abscisses pour $1 \leq x \leq 2$

$$A = (2\ cm)^2 \int_1^2 (f(x) - y)dt = 4\ cm^2 \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{lnx}{x^2}\right) dt = 4\ cm^2 \int_1^2 \frac{1}{x} dt + 4\ cm^2 \int_1^2 \frac{lnx}{x^2} dt$$

$$= 4\ cm^2 \int_1^2 \frac{1}{x} dt + 4I\ cm^2 = 4\ cm^2 [lnt]_1^2 + 4I\ cm^2 = 4\ cm^2 ln2 + 4I\ cm^2$$

$$= 4\ cm^2 ln2 + 4cm^2 \left(\frac{1-ln2}{2}\right) = 4cm^2 \left(ln2 + \frac{1-ln2}{2}\right) = 4cm^2 \left(\frac{2ln2+1-ln2}{2}\right)$$

$$= 4cm^2 \left(\frac{ln2+1}{2}\right) = 2cm^2(ln2+1) = (2ln2+2)cm^2 = 3{,}39cm^2$$

Bac. Session de Juin 2014

Exercice 1……………………………………………………..……$(5\ points)$

On se propose de Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}\,i)z - i = 0. \qquad (\boldsymbol{E})$$

1-/ a-/ Détermine le réel y tel que i*y* soit une solution de (***E***)

b-/ Détermine les réels *a* et *b* tels que pour tout complexe z

$$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}\,i)z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$$

2-/ a-/ Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (***E'***) : $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

b-/ En déduis les solutions de (***E***) sous forme algébrique et trigonométrique

Exercice 2………………..……………………………………………$(5\ points)$

Dans le cadre de la prévention des angines hivernales, une étude a été menée pour tester l'efficacité réelle d'un médicament constitué d'un cocktail de vitamines. Dans ce but, on a sélectionné un échantillon de 600 personnes réparties de manière aléatoire en trois groupes : 240 personnes dans le groupe **A**, 35% de l'échantillon dans le groupe **B**, et le reste dans le groupe **C**.

On a administré aux personnes du groupe **A** durant la période hivernale une dose journalière de ce médicament en le leur disant.

On a administré aux personnes du groupe **B** un placebo (c'est-à-dire un comprimé neutre, ne contenant aucun élément médicinal actif), tout en leur disant qu'il s'agissait du médicament.

On a administré aux personnes du groupe **C** le médicament en leur disant qu'il s'agissait d'un placebo.

Les résultats de l'étude sont recensés sur 600 fiches individuelles.

a-/ 28% des fiches signalent un traitement efficace. Parmi celles-ci 72 fiches correspondent à des personnes du groupe B

b-/ 75% des fiches correspondant aux personnes du groupe **A** ne signalent aucune amélioration significative.

1-/ Reproduis et compléter le tableau suivant :

	Groupe A	Groupe B	Groupe C	Total
Nombre de fiches signalant un traitement efficace				
Nombre de fiches ne signalant aucune amélioration significative				
Total	**240**			**600**

2-/ a-/ On choisit une fiche au hasard parmi les 600.

On considère les évènements suivants :

E_1 : «Il s'agit d'une fiche du groupe A.»,
E_2 : «Il s'agit d'une fiche signalant un traitement efficace.»,
$E_3 = E_1 \cap E_2$
$E_4 = E_1 \cup E_2$

Calcule les probabilités de ces quatre évènements.

b-/ On choisit au hasard une fiche du groupe **B**. On considère l'évènement E_5: «Il s'agit d'une fiche signalant un traitement efficace.».

Calcule la probabilité de l'évènement E_5. *Le résultat sera arrondi à 10^{-2}*.

3-/ Pour chacun des groupes, donne les fréquences en pourcentage des fiches signalant un traitement efficace.

<u>Problème</u>……………………………..………...………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

Trachypenaeus est le nom d'une espèce de crevette se développant dans les eaux chaudes de l'île de la Guadeloupe.
L'objectif de l'exercice est l'étude de la croissance en taille de cette espèce en fonction de l'âge des crevettes.

Partie A

Sur un échantillonnage et sur une courte durée, les relevés ont donné les résultats suivants :

Âge *ti* (en nombre de semaines)	1	2	3	4	5	6	7	8
Taille *yi* (exprimée en millimètre)	10	18	25	33	40	41	50	53

1-/ Soit G le point moyen du nuage de points associé à ce tableau. On considère la droite D passant par G et de coefficient directeur 6,14. Détermine une équation de la droite D**.**

2-/ On considère que la fonction affine représentée par la droite D traduit l'évolution de la taille en fonction de l'âge des crevettes avec les unités considérées. Détermine selon ce modèle la taille d'une crevette de 12 semaines**.**

3-/ On estime que l'espérance de vie d'une crevette *Trachypenaeus* en haute mer est de 3 années. Calcule, avec le modèle retenu, la taille atteinte au bout de 3 ans.

Partie B

En fait, des relevés sur une longue durée ont permis d'établir que la taille L(t) des crevettes Trachypenaeus exprimée en millimètre en fonction de l'âge t exprimé en semaines est donnée par : L(t) = $87{,}5(1 - e^{-0{,}12\,t})$

1-/ a-/ Détermine la limite de la fonction L en + ∞ en donne une interprétation.
b-/ Détermine la dérivée L'de la fonction L.
c-/ Étudie les variations de la fonction L sur [0 ; + ∞[.

2-/ a-/ Calcule, avec ce modèle, la taille d'une crevette de trois ans
b-/ Détermine l'âge théorique d'une crevette de taille 80 mm **.**

3-/ Trace la courbe représentative de la fonction L sur l'intervalle [0 ; 15] et la droite D de la **partie A** dans le même repère. On prendra pour unité graphique 1 cm pour une semaine en abscisse et 1 cm pour 10 mm en ordonnée. Donne une interprétation du graphique obtenu.

Correction Bac 2014

Exercice 1……………………………………………………..……**(5 *points*)**

On se propose de Résous l'équation suivante :

(E) : $Z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i = 0$

1) a) Déterminons le réely tel que iy soit une solution de (E)

iy est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $(iy)^3 + (\sqrt{3} - \mathrm{i})(iy)^2 + (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})(iy) - \mathrm{i} = 0$

$$\Leftrightarrow -iy^3 - y^2\sqrt{3} + iy^2 + iy + y\sqrt{3} - i = 0 \Leftrightarrow -y^2\sqrt{3} + y\sqrt{3} + i(-y^3 + y^2 + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y^2\sqrt{3} + y\sqrt{3} = 0 & (1) \\ -y^3 + y^2 + y - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow \mathrm{y}\sqrt{3}(-\mathrm{y} + 1) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{y} = 0$ ou $\mathrm{y} = 1$

$\mathrm{y} = 1$ est solution de l'equation (2)

$\mathrm{y} = 0$ ne verifie pas l'équation (2) alors y=1 d'où i est solution de l'équation (E).

b) Déterminons les réelsa et b tels que pour tout complexe z on a :

$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$

	1	$\sqrt{3} - i$	$1 - i\sqrt{3}$	$-i$
i		i	$i\sqrt{3}$	i
	1	$\sqrt{3}$	1	0

Ainsi on a : $\mathrm{z}^3 + (\sqrt{3} - \mathrm{i})\mathrm{z}^2 + (1 - \sqrt{3}\mathrm{i})\mathrm{z} - \mathrm{i} = (\mathrm{z} - \mathrm{i})(\mathrm{z}^2 + \sqrt{3}\mathrm{z} + 1)$

Donc $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$

2) a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'equation (E') : $\mathrm{z}^2 + \sqrt{3}\mathrm{z} + 1 = 0$; $\Delta = 3 - 4 = -1 = i^2$

D'où $\mathrm{z}_1 = \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$ et $\mathrm{z}_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et $\mathrm{S} = \left\{\frac{-\sqrt{3}-i}{2} ; \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right\}$

b) Déduisons les solutions de (E)

- **Les solutions sous forme algébrique :**

$\mathrm{z}^3 + (\sqrt{3} - \mathrm{i})\mathrm{z}^2 + (1 - \sqrt{3}\mathrm{i})\mathrm{z} - \mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{z} - \mathrm{i})(\mathrm{z}^2 + \sqrt{3}\mathrm{z} + 1) = 0$

$\mathrm{z} - \mathrm{i} = 0$ ou $\mathrm{z}^2 + \sqrt{3}\mathrm{z} + 1 = 0$

$\mathrm{z} - \mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{z} = \mathrm{i}$ et $\mathrm{z}^2 + \sqrt{3}\mathrm{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{z} = \frac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}$ ou $\mathrm{z} = \frac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$

D' après 2) a) on a :$S = \{ \mathrm{i} ; \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} ; \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \}$

- Les solutions sous forme trigonométrique:

$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = cos\frac{7\pi}{6} + i\,sin\frac{7\pi}{6}$ ou $\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\,sin(-\frac{5\pi}{6})$

$\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = cos\frac{5\pi}{6} + i\,sin\frac{5\pi}{6}$

$\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$ ou $\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6})$

$\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$

<u>Exercice 2</u>……………….……………………………………….($\boldsymbol{5\ points}$)

1) Complétons le tableau suivant :

	Groupe A	Groupe B	Groupe C	Total
Nombre de fiches signalant un traitement efficace	60	72	36	168
Nombre de fiches ne signalant aucune amélioration significative	180	138	114	432
Total	240	210	150	600

2) On choisit une fiche au hasard parmi les 600.
Calculons les probabilités des 4 événements :
Soit Ω l'univers des éventualités, $\text{Card}\Omega = 600$

$P(E_1) = \frac{\text{Card } E_1}{\text{Card } \Omega} = \frac{240}{600} = 0{,}4$

$P(E_2) = \frac{\text{Card } E_2}{\text{Card } \Omega} = \frac{168}{600} = 0{,}28$

$P(E_3) = \frac{\text{Card } E_3}{\text{Card } \Omega} = \frac{60}{600} = 0{,}1$

$P(E_4) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0{,}4 + 0{,}28 - 0{,}1 = 0{,}58$

D'où $P(E_1) = 0{,}4$ $P(E_2) = 0{,}28$ $P(E_3) = 0{,}1$ $P(E_4) = 0{,}58$

b) On choisit au hasard une fiche du groupe B
Calculons la probabilité de l'évènement E_5

$P(E_5) = \frac{72}{210} = 0{,}34$

3) Pour chacun des groupes, donnons les fréquences en pourcentage des fiches signalant un traitement efficace.

	Groupe A	Groupe B	Groupe C
Nombre de fiches signalant un traitement efficace	60	72	36
Fréquence en pourcentage	35 ,71	42,86	21,43

<u>Problème</u>……………………………………………………………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

Partie A

1) Déterminons une équation de la droite (D) passant par G et de coefficient directeur 6,14

$x_G = \frac{\sum t_i}{8} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = \frac{36}{8} = 4,5$

$y_G = \frac{\sum y_i}{8} = \frac{10+18+25+33+40+41+50+53}{8} = \frac{270}{8} = 33,75$

Donc G(4,5 ; 33,75)

(D) : $y = 6,14x + b$ et $G \in (D) \Leftrightarrow 33,75 = 6,14 \times 4,5 + b \Leftrightarrow b = 6,12$

=> (D) : $y = 6,14x + 6,12$

2) Déterminons la taille d'un poisson de 12 semaines

Pour $x = 12$ on a : $y = 6,14 \times 12 + 6,12 \Leftrightarrow y = 79,8$ mm

3) Calculons la taille atteinte au bout de 3 ans

On sait que 3 ans = 3×52 semaines soit 156 semaines

Pour $x = 156$ on a : $y = 6,14 \times 156 + 6,12 \Leftrightarrow y = 963,96$mm

Partie B

$L(t) = 87,5(1 - e^{-0,12t})$

1) a) Déterminons la limite de L en $+\infty$ et en donnons une interprétation

$\lim_{t \to +\infty} L(t) = \lim_{t \to +\infty} 87,5(1 - e^{-0,12t}) = 87,5$

Interprétation : Sur une longue durée de vie la taille des poissons tend vers 87,5 mm.

b) Calculons la dérivée $L'(t)$

$L'(t) = 87,5 \times 0,12e^{-0,12t}$ =>$L'(t) = 10,5e^{-0,12t}$

c) Etudions les variations de L sur $[0 ; +\infty[$

$\forall t \in [0 ; +\infty[L'(t) = 10,5e^{-0,12t} > 0$ Alors L est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

Tableau de variation de L

t	0		$+\infty$
$L'(t)$		$+$	
$L(t)$	0	$\nearrow$	$87,5$

2) a) Calculons avec ce modèle la taille d'un poisson de 3 ans

On sait que : 3 ans = 156 semaines

Pour $t = 156$, on a : $L(156) = 87,5(1 - e^{-0,12\times156})$ =>$L(156) = 87,49$ mm

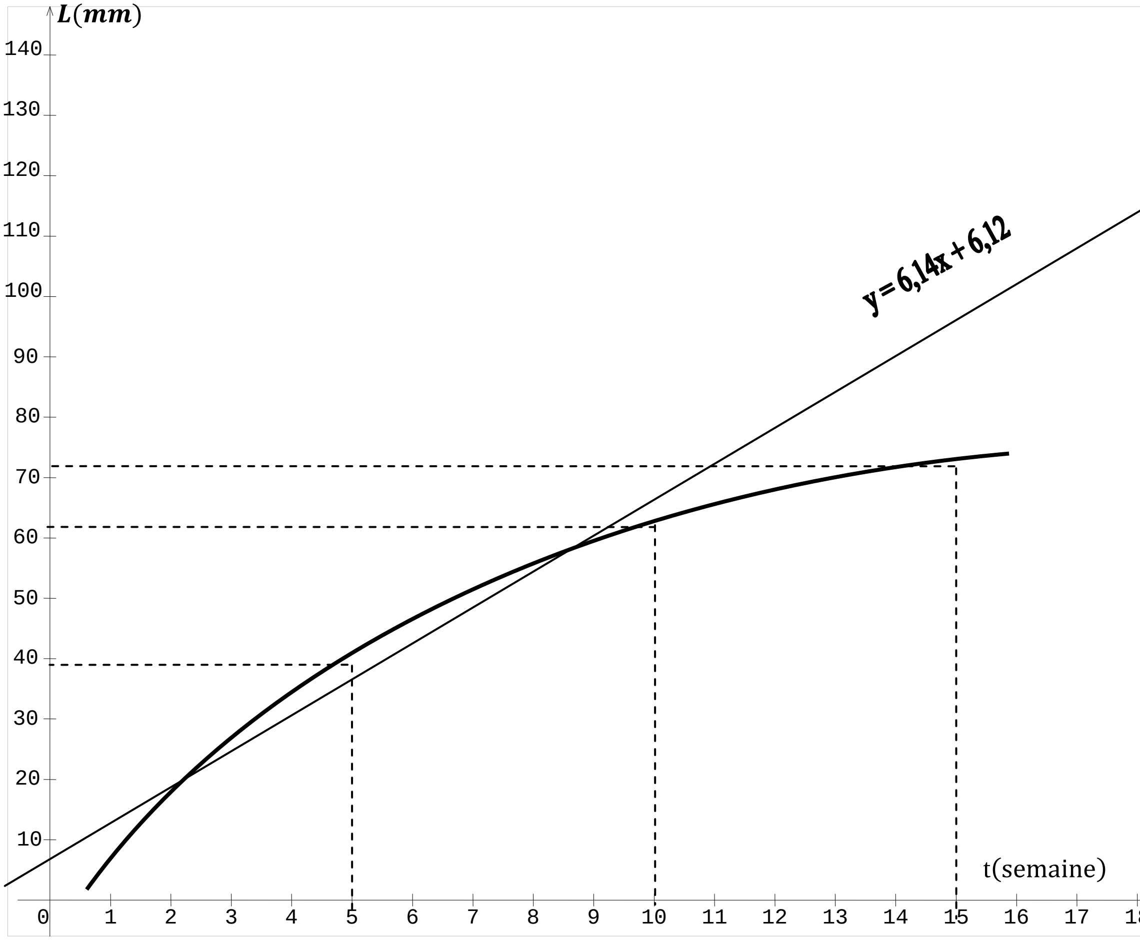
b) Déterminons l'âge théorique d'un poisson de taille 80 mm

$$L(t) = 80 \Leftrightarrow 87,5(1 - e^{-0,12t}) = 80 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,12t} = 1 - \frac{80}{87,5}$$

$\Leftrightarrow e^{-0,12t} = \frac{75}{875} \Leftrightarrow -0,12t = \ln\left(\frac{75}{875}\right) \Leftrightarrow t = \frac{-1}{0,12}\ln(\frac{75}{875})$ =>$t = 20,47$ Semaines

3) Traçons la courbe de la fonction L et de la droite (D) dans le même repère
Tableau de valeurs

t	0	5	10	15
L(t)	0	39,48	61,15	73,04



<u>Interprétation du graphique obtenu :</u>
La croissance en taille en fonction de l'âge des crevettes obtenue dans la partie A est meilleure que celle obtenue dans la partie B du problème dans les 2 premières semaines et aussi après la 8^{e} semaine.
Entre la 2^{e} et la 8^{e} semaine le modèle de la partie B est la meilleure.

Bac. Session de Juin 2015

Exercice 1……………………………………………………..……$(5\ points)$

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3.000 nouveaux.
Il démarre avec 50.000 pieds en 2015. En désignant par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année $(2015 + n)$.

1) a- Détermine le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017.
   b- Exprime X_{n+1} en fonction de X_n.
2) On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 60000 - X_n$.
   a- Montre que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b- Exprime u_n en fonction de n puis en déduire X_n en fonction de n.
   c- Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers en 20 ans ?
   d- Calcule la limite de la suite (X_n) puis conclus.

Exercice 2………………..……………………………………….$(5\ points)$

I// Soit f une fonction numérique à variable réelle x satisfaisant aux conditions suivantes :

- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $f(1) = f(3) = 0$; $f(2) = -1$; $f(0) = 1$; $f'(0) = f'(2) = 0$.
- $\forall\, x \in \,]-\infty\,; 0[\, \cup \,]2\,; +\infty[\,, f'(x) > 0$; et $\forall\, x \in \,]0\,; 2[\,, f'(x) < 0$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x + 2] = 0^-$

1) Dresse le tableau de variation de f.
2) (C) représentant la courbe de f, précise les équations des asymptotes à (C).
3) Précise le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
4) Donne le domaine de définition des fonctions définies par : $ln[f(x)]$ et $\frac{1}{f(x)}$ où ln désigne le logarithme népérien.

I// Soient les nombres complexes $Z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $Z_2 = -\sqrt{3} + i$.

1) Ecris Z_1 ; Z_2 et $\frac{Z_2}{Z_1}$ sous forme trigonométrique.
2) Montre qu'il existe deux suites géométriques (u) et (v) telles que $u_2 = v_2 = Z_1$ et $u_4 = v_4 = Z_2$ dont on déterminera les premiers termes u_0 et v_0 ainsi que la raison de chacune d'elles.

<u>Problème</u>…………………………..………..……………………($\mathbf{10}\ \boldsymbol{points}$)

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par : $f(x) = x + \frac{2(1+lnx)}{x}$.

1) a- Détermine l'ensemble Df de définition de la fonction f et les limites aux bornes de Df.

b- On considère la fonction h définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x^2 - 2lnx$.

- Etudie les variations de h sur $]0\ ;\ +\infty[$.
- En déduis le signe de $h(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

c- Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.

d- Prouve que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

2) a- Trace la courbe (C) de f et ses asymptotes dans le même repère.

b- On désigne par $A(k)$ l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan limitée par (C), Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = k$. Calcule $A(k)$.

c- pour quelle valeur de k à-t-on $A(k) = 8$?

Correction Bac 2015

Exercice 1…………………………………………………..……$(\boldsymbol{5\ points})$

1) a- Déterminons le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017.

- Le nombre d'arbres qu'il aura en 2016est :

$$X_1 = X_0 - \frac{5}{100}X_0 + 3000 = 0{,}95X_0 + 3000 = 0{,}95 \times 50\,000 + 3000 = 50\,500$$

- Le nombre d'arbres qu'il aura en 2017est :

$$X_2 = X_1 - \frac{5}{100}X_1 + 3000 = 0{,}95X_1 + 3000 = 0{,}95 \times 50\,500 + 3000 = 50\,975$$

b- Exprimons X_{n+1} en fonction de X_n.

$X_{n+1} = X_n - \frac{5}{100}X_n + 3000 = 0{,}95X_n + 3000.$ D'où $X_{n+1} = 0{,}95X_n + 3000$

2) On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 60000 - X_n$.

a- Montrons que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

$u_n = 60000 - X_n$

=> $u_{n+1} = 60000 - X_{n+1} = 60000 - (0{,}95X_n + 3000\ ) = 60000 - 0{,}95X_n - 3000$

$= 57000 - 0{,}95X_n = 0{,}95\left(60\,000 - X_n\right) = 0{,}95u_n$

D'où la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ et de premier terme $u_0 = 60000 - X_0 = 60\,000 - 50\,000 = 10\,000.$

b- Exprimons u_n en fonction de n puis en déduire X_n en fonction de n.

$u_n = u_0(q)^n = 10\,000(0{,}95)^n.$

D'où $u_n = 10\,000(0{,}95)^n.$

$u_n = 60000 - X_n \Leftrightarrow X_n = 60000 - u_n = 60000 - 10\,000(0{,}95)^n$

D'où $X_n = 60000 - 10\,000(0{,}95)^n.$

c- Déterminons le nombre d'arbres fruitiers que ce paysan aura en 20 ans

$X_{20} = 60000 - 10\,000(0{,}95)^{20} = 56415{,}14 \approx 56415$

d- Calculons la limite de la suite (X_n)

$\lim_{x \mapsto +\infty} X_n = \lim_{x \mapsto +\infty} [60000 - 10\,000(0{,}95)^n] = 60\,000$ car $|0{,}95| < 0$ alors $\lim_{x \mapsto +\infty} (0{,}95)^n = 0$

Conclusion :

Pour une longue durée, le nombre d'arbre ne dépasse pas 60 000 pieds.

Exercice 2……………….……………………………………………(5 *points*)

I// D'après les renseignements :

1) Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2) Les équations des asymptotes à (C) sont :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$

Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x + 2] = 0^-$

Alors la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

3) Le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x est :

$\forall\ x \in \,]-\infty\,; 1] \cup [3\,;\ +\infty[\,, f(x) \geq 0$; et $\forall\ x \in [1\,;\ 3], f(x) \leq 0$.

4) Donnons le domaine de définition des fonctions définies par : $ln[f(x)]$ et $\frac{1}{f(x)}$

$D_{ln[f(x)]} = \{x/x \in \mathbb{R}; f(x) > 0\}$ =>$D_{ln[f(x)]} = \,]-\infty\,; 1] \cup [3\,;\ +\infty[$

$D_{\frac{1}{f(x)}} = \{x/x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}$ =>$D_{\frac{1}{f(x)}} = \mathbb{R} - \{1\,; 3\}$

I// Soient les nombres complexes $Z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $Z_2 = -\sqrt{3} + i$.

1) Ecrivons Z_1 ; Z_2 et $\frac{Z_2}{Z_1}$ sous forme trigonométrique.

$Z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ => $|Z_1| = 1$ et $arg(Z_1) = \frac{\pi}{3}$. Donc $Z_1 = cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}$

$Z_2 = -\sqrt{3} + i$ => $|Z_2| = 2$ et $arg(Z_2) = \frac{5\pi}{6}$. Donc $Z_2 = 2\left[cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right]$

$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{|Z_2|}{|Z_1|}\left[cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{2}{1}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)$

2) Montrons qu'il existe deux suites géométriques (u) et (v) telles que $u_2 = v_2 = Z_1$ et $u_4 = v_4 = Z_2$ dont on déterminera les premiers termes u_0 et v_0 ainsi que la raison de chacune d'elles.

Soit (w_n) une suite géométrique vérifiant les conditions $w_2 = Z_1$ et $w_4 = Z_2$

$w_n = w_0(q)^n$ => $w_2 = w_0(q)^2 \Leftrightarrow w_2 = w_0q^2 \Leftrightarrow w_0q^2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

$w_4 = w_0(q)^4 \Leftrightarrow w_4 = w_0q^4 \Leftrightarrow w_0q^4 = -\sqrt{3} + i$

$\frac{w_0q^4}{w_0q^2} = \frac{-\sqrt{3}+i}{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow q^2 = 2i$

Soit $q = x + iy$ tel que : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ x^2 - y^2 = 0 & (2) \\ 2xy = 2 & (3) \end{cases}$

$(1) + (2)$ Donne $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

(3) Donne $2xy = 2 \Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$

- Si $x = -1$ => $y = -1$
- Si $x = 1$ => $y = 1$

Donc $q = -1 - i$ ou $q = 1 + i$

- Pour $q = 1 + i$, on a : $w_0 = \frac{w_2}{q^2} = \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{2i} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4i} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$

Sachant que $u_2 = v_2 = Z_1$ et $u_4 = v_4 = Z_2$ d'où il existe une suite géométrique (u) de premier terme $u_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$ de raison $q = 1 + i$ et une suite géométrique (v) de premier terme $v_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$ de raison $q = -1 - i$.

<u>Problème</u>..(10 *points*)

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par : $f(x) = x + \frac{2(1+lnx)}{x}$.

1) a- Déterminons Df et les limites aux bornes de Df.

$Df = \{x/x \in \mathbb{R}\,; x > 0\ et\ x \neq 0\}$ => $Df =]0\,;\ +\infty[$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b- On considère la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = x^2 - 2lnx$.

- Etude des variations de h sur $]0\,;\,+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

$h(x) = x^2 - 2lnx$ => $h'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x}$

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,; x > 0$ Alors le signe de $h'(x)$ dépend du signe du numérateur $2x^2 - 2$.
Posons $2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin]0\,;\,+\infty[$ ou $x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi : $\forall x \in]0\,;\,1[\,; h$ est strictement décroissante.

$\forall x \in]1\,;\,+\infty[\,; h$ est strictement croissante.

- En déduisons le signe de $h(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Pour cela dressons le tableau de variation de h.

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variation, $\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,; h$ Est positif.

c- Etudions les variations de f puis dressons son tableau de variation.

$f(x) = x + \frac{2(1+lnx)}{x}$ => $f'(x) = 1 + \frac{\frac{2}{x}\times x - 2(1+lnx)}{x^2} = \frac{x^2-2lnx}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,; x^2 > 0$ Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur $h(x)$.

Or d'après la question 1)-b, $\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,; h(x) > 0$

Donc $\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,; f'(x) > 0$ => $\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,; f$ est strictement croissante.

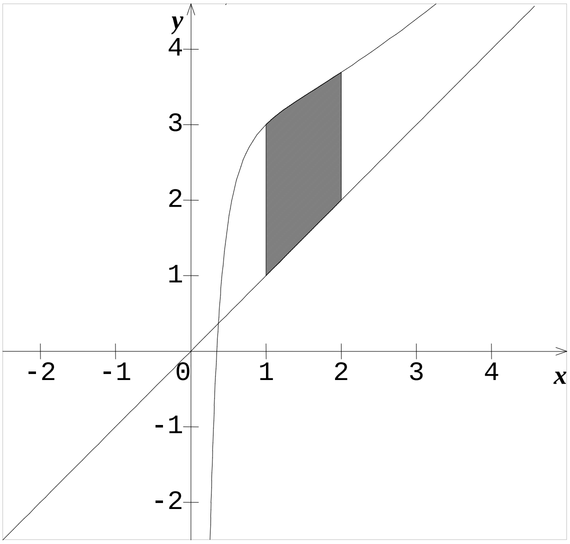
x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

d- Prouvons que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to +\infty} \left[x + \frac{2(1+lnx)}{x} - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2(1+lnx)}{x} = \lim \frac{2}{x} + 2\frac{lnx}{x} = 0$$

D'où la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) de f.

2) a- Traçons la courbe (C) de f et ses asymptotes dans le même repère.



b- On désigne par $A(k)$ l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan limitée par (C), Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = k$.

Calculons $A(k)$.

$$A(k) = \int_1^k [f(x) - y]dx = \int_1^k \left[\frac{2(1+lnx)}{x}\right] dx = \int_1^k \left[\frac{2}{x} + 2\frac{lnx}{x}\right] dx = \left[2lnx + \frac{2(lnx)^2}{2}\right]_1^k$$
$$= [2lnx + (lnx)^2]_1^k = (2lnk + (lnk)^2)ua.$$

c- Déterminons la valeur de k pour la quelle on a : $A(k) = 8$

$A(k) = 8 \Leftrightarrow 2lnk + (lnk)^2 = 8 \Leftrightarrow 2lnk + (lnk)^2 - 8 = 0.$

Posons $lnk = X$ => $2X + X^2 - 8 = 0$.

On a : $\Delta' = 9$ alors $X_1 = -4$ et $X_2 = 2$

Pour $X = -4$ on a : $lnk = -4 \Leftrightarrow k = e^{-4}$

Pour $X = 2$ on a : $lnk = 2 \Leftrightarrow k = e^2$

Bac. Session de Juin 2016

Exercice 1……………………………………………………..……$(5\ points)$

1°/ Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue *z* :
$Z^2 + 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$, détermine le module et un argument de chaque solution.
2°/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(0\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. On considère la transformation ***T*** du plan qui, à tout point *M* d'affixe *Z* associe le point *M'* d'affixe *Z '* défini par $Z' = e^{\frac{2\pi}{3}i}Z$.
a-/ Détermine la nature de la transformation T et donne tous ses éléments caractéristiques.
b-/ Soit *A* le point d'affixe $Z_A = -\sqrt{3} + i$. Détermine les affixes respectives Z_B et Z_C des points *B* et *C* tels que *B* = ***T***(*A*) et *C* = ***T***(*B*). Construis les points *A*, *B* et *C* dans le plan muni du repère $(0\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
3°/ Calcule $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ puis en déduis la nature du triangle *ABC*.

Exercice 2……………….………………………………………$(5\ points)$

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant *t* (exprimé en heures), peut être considéré comme une fonction *g* à valeurs réelles de la variable *t*. La vitesse de prolifération à l'instant *t* du nombre des microbes est la dérivée *g'* de cette fonction. On a constaté que *g'*(*t*)= *kg*(*t*) où *k* est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant t = 0.

1°/ Détermine l'unique solution de l'équation différentielle *g'*(*t*)= *kg*(*t*) telle que $g'(0) = N$.

2°/Sachant qu'au bout de 2 heures le nombre de microbes a quadruplé, Calcule en fonction de N le nombre de microbes au bout de 3 heures.

3°/ Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 9 600 microbes au bout de 5 heures.

Problème……………………….………..…………………$(10\ points)$

Soit la fonction numérique *f* à variable réelle *x* définie par $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$.
On désigne par ($\mathbf{C}_f$) la représentation graphique de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.
1°/ Montre que ($\mathbf{C}_f$) admet deux asymptotes dont on Déterminera les équations.

2°/ Précise la position de ($\mathbf{C}_f$) par rapport à son asymptote oblique.
3°/ Etudie les variations de *f*.
4°/ Existe-t-il des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$? Si oui trouve les équations de ces tangentes en ces points.
5°/ Trace la courbe ($\mathbf{C}_f$) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé $(0\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.
6°/ Montre que la restriction *g* de *f* à l'intervalle **I** =]1 ; 2] est une bijection de **I** vers un intervalle **J** que l'on précisera.
7°/ **a-/** Calcule $(g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right)$.
b-/ Dresse le tableau de variation de g^{-1} puis trace sa courbe représentative dans le même repère que celle de *f*.

Correction Bac 2016

Exercice 1………………………………………………………..……($5\ points$)

1°/ Résolvons dans l'ensemble ℂ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

Résolvons dans l'ensemble ℂ des nombres complexes, l'équation d'inconnue Z :
$Z^2 + 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$
$\Delta' = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 4 = 3 - 4 = -1 = i^2$ => $Z_1 = -\sqrt{3} - i$ et $Z_2 = -\sqrt{3} + i$

Déterminons le module et un argument de chaque solution.

- **Pour $\boldsymbol{Z_1 = -\sqrt{3} - i}$**

$|Z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$ et $arg(Z_1) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

- **Pour $\boldsymbol{Z_2 = -\sqrt{3} + i}$**

$|Z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 2$ et $arg(Z_1) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

2°/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(0\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. On considère la transformation $\boldsymbol{T}$ du plan qui, à tout point M d'affixe Z associe le point M**'** d'affixe Z **'** défini par $Z' = e^{\frac{2\pi}{3}i}Z$.

a-/ Déterminons la nature de la transformation T

T est soit une rotation de centre O et d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ou
T est une similitude de rapport $k = \left|e^{\frac{2\pi}{3}i}\right|$ =1; de centre Ω d'affixe $Z_\Omega = \frac{1}{1-e^{\frac{2\pi}{3}i}}$

=> $Z_\Omega = \frac{1}{1-e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \frac{e^{\frac{\pi}{6}i}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{6}\left(3 + i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$

=> $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

<u>NB</u> : Toute Similitude de rapport 1 est une rotation.

b-/ Soit A le point d'affixe $Z_A = -\sqrt{3} + i$.

Déterminons les affixes respectives Z_B et Z_C des points B et C tels que :
$B = \boldsymbol{T}(A)$ et $C = \boldsymbol{T}(B)$.
$Z_A = -\sqrt{3} + i$ => $Z_A = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$ et : $A\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$

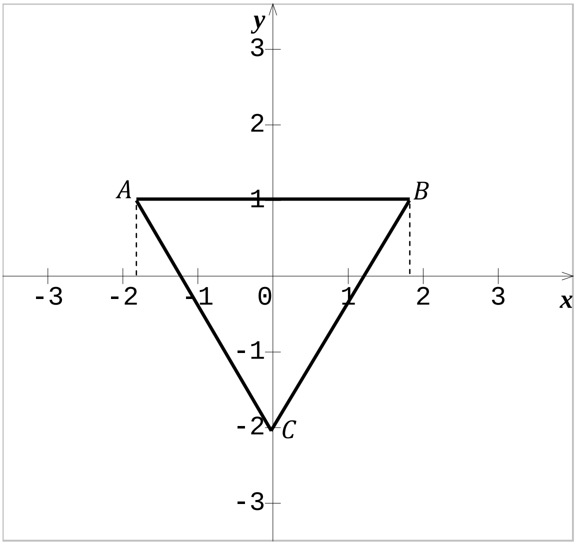
$Z_B = Z_A \times e^{\frac{2\pi}{3}i}$ => $Z_B = 2e^{\frac{5\pi}{6}i} \times e^{\frac{2\pi}{3}i} = 2e^{\frac{9\pi}{6}i} = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} = -2i$ => $B\binom{0}{-2}$

$$Z_C = Z_B \times e^{\frac{2\pi}{3}i} \Rightarrow Z_C = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} \times e^{\frac{2\pi}{3}i} = 2e^{\frac{13\pi}{6}i} = 2e^{\frac{12\pi+\pi}{6}i} = 2e^{\left(\frac{12\pi}{6}i+\frac{\pi}{6}i\right)} = 2e^{\left(2\pi i+\frac{\pi}{6}i\right)}$$

$$= 2e^{2\pi i} \times e^{\frac{\pi}{6}i} = 2 \times e^{\frac{\pi}{6}i} = \sqrt{3} + i \Rightarrow C\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$$

On a : $A\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$

Construisons les points A, B et C dans le plan muni du repère $(0\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.



3°/ Calculons $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$

$$\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = \frac{(-2i)-(\sqrt{3}+i)}{(-\sqrt{3}+i)-(\sqrt{3}+i)} = \frac{-\sqrt{3}-3i}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

En déduisons la nature du triangle ABC.

Puisque $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors ABC est un triangle équilatéral direct.

Exercice 2……………….……………………………………………$(5\ \boldsymbol{points})$

Le nombre de microbe à l'instant t est exprimé en heures
g est la fonction associée à valeur réelle de cette culture.
g' est la vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes de la fonction g avec
$g'(t) = kg(t)$ où k est un est réel strictement positif.

1. L'unique solution de l'équation différentielle $g'(t)=kg(t)$ telle que $N=g(0)$
$g'(t) = kg(t) \implies g(t) = ke^{kt}$
$g(0) = N \iff A = N$, donc $g(t) = Ne^{kt}$.

2. $g'(2) = 4g(2)$
Le nombre de microbe au bout de 3 heures.
$g(3) = Ne^{3k}$.

Calculons la valeur du coefficient k.

$g'(t) = kNe^{kt}$

$g'(2) = 4g(2) \Leftrightarrow kNe^{2k} = 4Ne^{2k} \Rightarrow k = 4$

Donc $g(3) = Ne^{3\times 4} = Ne^{12}$.

3. La valeur de N sachant que la culture contient 9 600 microbes au

$g(5) = 9600 \Leftrightarrow Ne^{5k} = 9600 \implies N = 9600e^{-5k}$.

<u>Problème</u>……………………………..………..……………………(10 *points*)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{x^2-2x+2}{x-1}$
(Cf) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,i\,;\,j)$.

1. Montrons que (Cf) admet deux asymptotes dont on Déterminera les équations :
Ensemble de définition de la fonction f
$Df = \{x \in \mathbb{R}, x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1\,;\, +\infty[$

Les limites aux bornes de Df :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-2x+2}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x+2}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+2x+2}{x+1} = +\infty$$

En $-\infty$ *et* $+\infty$; on a une possibilité d'asymptote oblique.

Recherche de l'asymptote oblique.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x + 2}{x - 1} = -1$$

$\Rightarrow b = -1$. D'où $y = ax + b = x - 1$ est une asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$

et $x = 1$ est une asymptote verticale.

2°/ Précisons la position de ($\mathbf{C}_f$) par rapport à son asymptote oblique.

Pour ce la étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - 1} = 0$.
Etudions le signe de $x - 1$. Posons $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe de $f(x) - y$, on a :

$\forall x \in]-\infty\,;\, 1[\,,\ f(x) - y < 0$. Alors $\forall x \in]-\infty\,;\, 1[$, (C_f) est en dessous de l'asymptote.

$\forall x \in]1\,;\, +\infty[\,,\ f(x) - y > 0$. Alors $\forall x \in]1\,;\, +\infty[$, (C_f) est au dessus de l'asymptote.

3°/ Etudions les variations de f.

$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$

Or $\forall\ x \in Df, (2x)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du

Numérateur $x^2 - 2x$. Posons $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

4°/ Vérifions s'il existe des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$
Soit x_0 l'abscisse de ces points

La courbe a pour coefficient directeur $\frac{3}{4} \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{x_0{}^2 - 2x_0}{(x_0 - 1)^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0 - 1)^2} = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 3)(x_0 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ ou \\ x_0 = -1 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} f(3) = \frac{5}{2} \\ et \\ f(-1) = -\frac{5}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} f'(3) = \frac{3}{4} \\ et \\ f'(-1) = \frac{3}{4} \end{cases}$

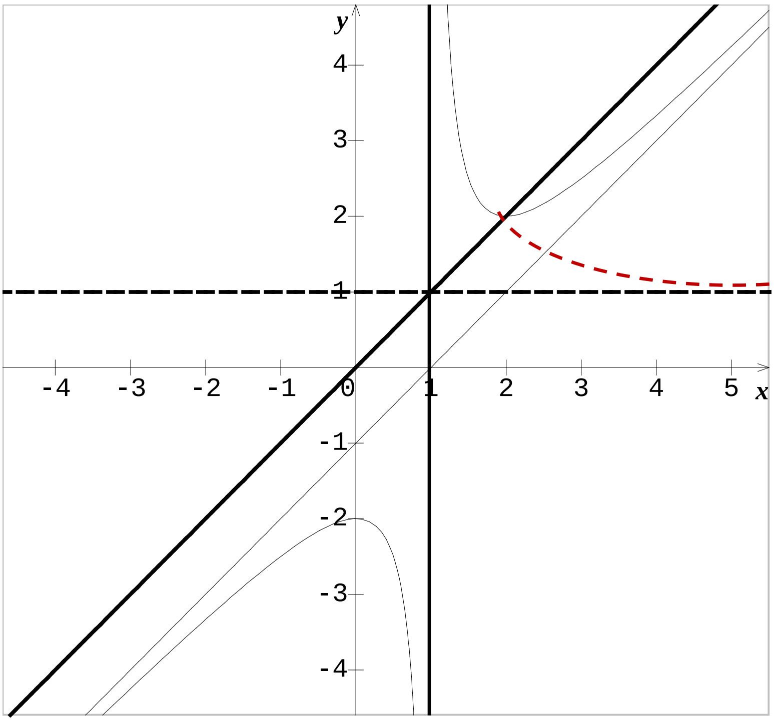
Les équations de ces tangentes en ces points sont :

(T_3): $y = \frac{3}{4}(x-3) + \frac{5}{2} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

(T_{-1}): $y = \frac{3}{4}(x+1) - \frac{5}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$

5°/ Traçons la courbe ($\mathbf{C}_f$) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé $(0\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

- $x = 1$ est asymptote verticale.
- $y = x - 1$ est asymptote oblique.



6°/ Montrons que la restriction g de f à l'intervalle **I** =]1 ; 2] est une bijection de **I** vers un intervalle **J** que l'on précisera.

Montrons que la restriction g de f à l'intervalle I =]1 ; 2] est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
En observant le tableau de variation de f, on remarque que $\forall\ x \in]1\ ;\ 2]$, la restriction g de f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle I =]1 ; 2] vers l'intervalle J = $[\ 2\ ;\ +\infty\ [$ Par conséquent h réalise une bijection de l'intervalle I =]1 ; 2] vers l'intervalle J = $[\ 2\ ;\ +\infty\ [$
Construisons la courbe représentative de la fonction réciproque h^{-1} de h dans le même repère que (C). **(Voir figure)**
NB : N'oublier jamais que la courbe représentative d'une fonction et celle de sa bijection réciproque son symétrique par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.
Ainsi la construction de la courbe la fonction réciproque g^{-1} de g est visualisée sur la figure.
7°/ a-/ Calculons $(g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right)$.

$$(g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{g'\left[(g^{-1})\left(\frac{5}{2}\right)\right]}$$

Calculons $(g^{-1})\left(\frac{5}{2}\right)$

$$g(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 - 9x + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 \text{ et } \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ ou \\ x_2 = 3 \notin I \end{cases}$$

$$\Rightarrow (g^{-1})\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \text{ et } g'\left[(g^{-1})\left(\frac{5}{2}\right)\right] = g'\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 - 4 = -3$$

Par suite $(g^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{3}$

b-/ Dressons le tableau de variation de g^{-1} puis traçons sa courbe représentative dans le même repère que celle de f.

x	1	$+\infty$
$(g^{-1})'(x)$	$-$	
$(g^{-1})(x)$	2 ↘	1

La courbe représentative de g–1 est tracé en pointille dans le même repère que ($C f$).

Bac. Session de Juin 2017

Exercice 1………………………………………………………..……($5\ points$)

I) On pose $p(Z) = Z^3 + (2-2i)Z^2 + (5-4i)Z - 10i = 0$.
1) Calcule $p(2i)$.
2) En déduis une factorisation de $p(Z)$.
3) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.
II) Un lot de vaccin contre la méningite est efficace à 75%, c'est-à-dire sur 100 personnes vaccinées, 75 seulement sont sures d'être protégées contre la maladie.
On vaccine 20 personnes avec ce produit.
Quelle est la probabilité pour que :
1) Aucune des personnes ne soit protégée ?
2) La moitié des personnes soit protégée ?
3) Vingt personnes soit protégée ?

Exercice 2………………..……………………………………….($5\ points$)

Un biologiste observe la croissance d'une population de bactéries en milieu fermé.

La population initiale est de 100 bactéries. La capacité maximale du milieu est de 1000 bactéries.

On suppose que la population augmente de 6,5% toutes les heures et que le biologiste rajoute 100 bactéries à la préparation toutes les heures.

On note R_n le nombre de bactéries présentes dans la population au bout de n heures.

On admettra que pour tout entier naturel n, on a : $R_{n+1} = 100 + 1{,}065R_n$.

On introduit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = R_n + \frac{100000}{65}$.

1) Montre que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2) Exprime (u_n) en fonction de n puis en déduis l'expression de R_n en fonction de n.

3) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries sera-t-il égal à 90% de la capacité maximale du milieu ?

Problème………………………..………...……………………($10\ points$)

Soit la fonction f définie par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.
On désigne par (Cf) sacourbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. unité graphique : 1 cm.
1) Dersse le tableau de variation de f.
2) Montre que f réalise une bijection de $[1\ ;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
3) Trouve l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse nulle.
4) Trouve les coordonnées des points d'intersections de la courbe (Cf) avec les axes du repère.
5) Trace la courbe (Cf) et la tangente (T) dans le même repère.
6) Soit F la fonction définie par : $F(x) = (ax^2bx + c)e^{-x}$. Où a ; b et c sont des nombres réels.

a- Détermines les réels a ; b et c pour que F soit une primitive de f.
b- Calcule en cm^2 l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (Cf), la tangente (T), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Correction Bac 2017

<u>Exercice 1</u>……………………………………………………..……(5 ***points***)

I) On pose $p(Z) = Z^3 + (2-2i)Z^2 + (5-4i)Z - 10i$.

1) Calculons $p(2i)$.

$p(2i) = (2i)^3 + (2-2i)(2i)^2 + (5-4i)(2i) - 10i = 0$

2) En déduisons une factorisation de $p(Z)$.

	1	$2-2i$	$5-4i$	$-10i$
$2i$		$2i$	$4i$	$10i$
	1	2	5	0

$\boldsymbol{Z_0}$ $\quad \boldsymbol{a} \quad\quad \boldsymbol{b} \quad\quad\quad \boldsymbol{c}$

D'où $p(Z) = (Z-2i)(aZ^2 + bZ + c) = (Z-2i)(Z^2 + 2Z + 5)$

3) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.

$p(Z) = 0 \Leftrightarrow (Z-2i)(Z^2 + 2Z + 5) = 0 \Leftrightarrow Z - 2i = 0$ Ou $Z^2 + 2Z + 5 = 0$

$Z_0 - 2i = 0 \Rightarrow Z_0 = 2i$.

$Z^2 + 2Z + 5 = 0$, $\Delta = (2i)^2 \Rightarrow Z_1 = -1 - 2i$ et $Z_2 = -1 + 2i$

Donc $S = \{2i\ ;\ -1-2i\ ;\ -1+2\}$

II) On observe qu'il s'agit d'une loi binomiale de paramètre :

$n = 20$ et de probabilité $p = 0{,}75$ et $q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

Soit x la variable aléatoire correspondant au nombre de personne protégées parmi les 20.

Pour $0 \leq x \leq 20$, on a : $p(x = k) = C_{20}^{k} \times (0{,}75)^k (0{,}25)^{n-k}$.

Calculons la probabilité pour que :

1) Aucune des personnes ne soit protégée

$p(x = 0) = C_{20}^{0} \times (0{,}75)^0 (0{,}25)^{20} = 9{,}09 \times 10^{-13}$.

2) La moitié des personnes soit protégée

$p(x = 10) = C_{20}^{10} \times (0{,}75)^{10} (1 - 0{,}75)^{10} = 9{,}9 \times 10^{-13}$.

3) Vingt personnes soit protégée

$p(x = 20) = C_{20}^{20} \times (0{,}75)^{20} (1 - 0{,}75)^{0} = 0{,}031 = 31{,}71 \times 10^{-2}$.

<u>Exercice 2</u>………………..…………………………………………(5 ***points***)

1) Montrons que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

(u_n) est une suite géométrique si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ ou $u_{n+1} = qu_n$

$u_n = R_n + \frac{100000}{65}$ => $u_{n+1} = R_{n+1} + \frac{100000}{65}$. Or $R_{n+1} = 100 + 1{,}065R_n$.

=> $u_{n+1} = 100 + 1{,}065R_n + \frac{100000}{65} = \frac{106500}{65} + \frac{1065}{1000}R_n = 1{,}065\left(\frac{100000}{65} + R_n\right)$

=> $u_{n+1} = 1{,}065u_n$

D'où u_n est une suite géométrique de raison $q = 1{,}065$.

2) **- Exprimons $(\boldsymbol{u_n})$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.**

$u_n = u_0(q)^n \Leftrightarrow u_n = \frac{21300}{13}(1{,}065)^n$ ou $u_n = 1638{,}46(1{,}065)^n$ ou $u_n = \frac{106500}{65}(1{,}065)^n$

- En déduis l'expression de $\boldsymbol{R_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$

$u_n = R_n + \frac{100000}{65} \Leftrightarrow R_n = u_n - \frac{100000}{65}$. Or $u_n = \frac{21300}{13}(1{,}065)^n$

=> $R_n = \frac{21300}{13}(1{,}065)^n - \frac{100000}{65}$ ou $R_n = \frac{106500}{65}(1{,}065)^n - \frac{100000}{65}$

3) Déterminons le temps au bout du quel le nombre de bactéries sera-t-il égal à 90% de la capacité maximale du milieu

On a : $R_n = 900 \Leftrightarrow \frac{21300}{13}(1{,}065)^n - \frac{100000}{65} = 900 \Leftrightarrow 1{,}065^n = \frac{317}{213} \Leftrightarrow$

$nln(1{,}065) = ln\left(\frac{317}{213}\right) \Leftrightarrow n = \frac{ln\left(\frac{317}{213}\right)}{ln(1{,}065)} \Leftrightarrow n = 6{,}31 \approx 7$

Alors c'est après 7 heures que la colonie sera à 90% de saturation.

<u>Problème</u>………………………..………..……………………$(\boldsymbol{10\ points})$

Soit la fonction f définie par $f(x) = (x+1)^2e^{-x}$.
On désigne par (Cf) sacourbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. unité graphique : 1 cm.
1) Derssons le tableau de variation de f.
$Df = \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)^2e^{-x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)^2e^{-x} = 0$

$f(x) = (x+1)^2e^{-x}$ => $f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2e^{-x} = (x+1)(1-x)e^{-x}$

Pour tout $x \in Df$, on a : $e^{-x} > 0$ alors le signe de f' dépend de $(x+1)(1-x)$

Posons $(x+1)(1-x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0$ ou $1-x \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

2) Montrons que f réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
$f(1) = (1+1)^2e^{-1} = 4e^{-1}$
D'après le tableau de variation, $\forall x \in [1\,;+\infty[$, f est continue et strictement decroissante.
Elle réalise donc une bijection de $[1\,;+\infty[$ vers $f([1\,;+\infty[) = J = \left]0\,;\frac{4}{e}\right]$
3) Trouvons l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse nulle.
(T): $y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow (T)$: $y = x + 1$

4) Trouvons les coordonnées des points d'intersections de la courbe (Cf) avec les axes du repère.

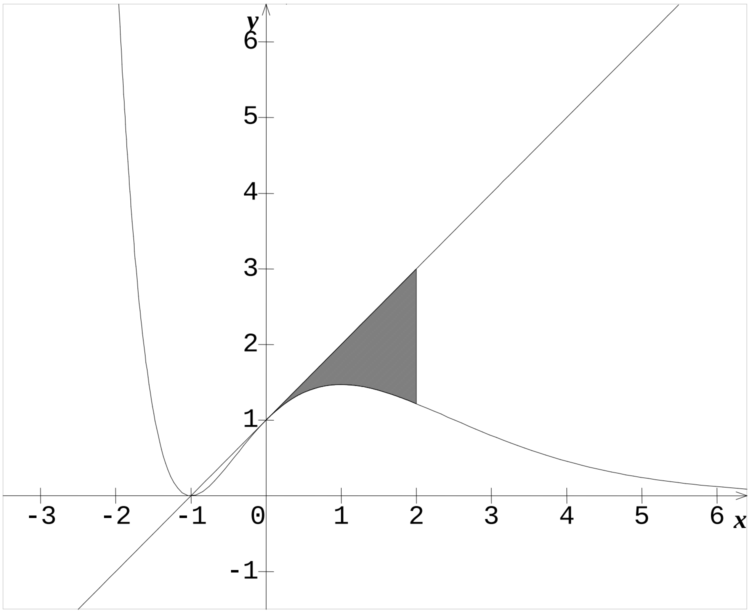
- $(Cf) \cap (ox) \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2e^{-x} = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Donc (Cf) coupe l'axe (ox) au point $A(-1\,;0)$

- $(Cf) \cap (oy) \Rightarrow y = f(0) = 1$

Donc (Cf) coupe l'axe (oy) au point $B(0\,;1)$

5) Tracons la courbe (Cf) et la tangente (T) dans le même repère.



6) Soit F la fonction définie par : $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$. Où a ; b et c sont des nombres réels.

a- Déterminons les réels a ; b et c pour que F soit une primitive de f.
F soit une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$.
Or $F'(x) = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$

Donc $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x} = (x + 1)^2 e^{-x}$
$\Leftrightarrow [-ax^2 + (2a - b)x + b - c] = (x + 1)^2 \Leftrightarrow -ax^2 + (2a - b)x + b - c = x^2 + 2x + 1$

Par identification, on a : $\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 2 \\ b - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = -5 \end{cases}$

b- Calculons en cm^2 l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (Cf), la tangente (T), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

$A = \int_0^2 [y - f(x)] u_a \, dx = \int_0^2 [x + 1 - (x + 1)^2 e^{-x}] u_a \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x + F(x)\right]_0^2 u_a$

=> $A = \left[\left(\frac{1}{2}(2)^2 + 2 + F(2)\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2 + 0 + F(0)\right)\right] u_a = 1{,}30 \; cm^2$