COLLEGE PRIVE LAIC LA FONTAINE	EVALUATION NUMERO 4	NIVEAU
DPARTEMENT DE MATHEMATIQUES	DUREE : 4 HEURES/ COEF : 7	TLEC

PARTIEA : EVALUATION DES RESSOURCES 15,5 points

EXERCICE 1 : 4,75 points

Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par : $\begin{cases} x_0 = 3,\ y_0 = 1 \\ \forall n\epsilon\mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall n\epsilon\mathbb{N}, y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$.

1) **Démontrer par récurrence que les points M_n de coordonnées $(x_n; y_n)$ sont sur la droite (D) d'équation : $2x - y - 5 = 0$.** **0,5 point**
2) **En déduire x_{n+1} en fonction de x_n.** **0,5 point**
3) **Démontrer que (x_n) et (y_n) sont des suites d'entiers relatifs.** **0,75 point**
4) **Soit n un entier naturel.**
   a) **Démontrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5.** **0,5 point**
   b) **Démontrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5, alors ils sont premiers entre eux.** **0,5 point**
5) **a. Démontrer par récurrence que : $\forall n\epsilon\mathbb{N}, x_n = 2^{n+1} + 1$.** **0,75 point**
   b. Soit n un entier naturel. Démontrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4}. **0,5 point**
   c. En déduire les valeurs de n pour lesquelles x_n et y_n sont divisibles par 5. **0,75 point**

EXERCICE 2 :4,5 points

1) **On désigne par g la fonction définie sur $[0; \pi]$ par : $g(x) = xcosx - sinx$.**
   a) **Etudiez les variations de g et dressez son tableau de variations.** **1 point**
   b) **Déduisez-en le signe de g(x) sur $[0; \pi]$.** **0,5 point**
2) **Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $[0; \pi]$ par : $f(x) = \frac{sinx}{x}$ $si\ 0 < x \leq \pi\ et\ f(0) = 1$.**
   Etudiez les variations de f sur $[0; \pi]$. **0,75 point**
3) **Le but de cette question est d'étudier la dérivabilité de f en $x = 0$.**
   a) **Prouvez que pour tout réel x, $x \geq 0 \geq, 0 \leq x - sinx \leq \frac{x^3}{6}$. Pour cela, on introduira la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ $par\ h(x) = sinx - x + \frac{x^3}{6}$. On calculera h'(x), h''(x)et h'''(x) et on déduira le signe de h.** **1 point**
   b) **Démontrez que f est dérivable en $x = 0$ et calculez $f'(0)$.** **0,5 point**
4) **Construisez la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (on prendra 3 cm pour unité).** **0,75 point**

EXERCICE 3 :6,5 points

I. **$(e_1; e_2; e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note f l'application linéaire définie par :**
$f(e_1) = e_3; f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3\ et\ f(e_3) = e_3$.

1) **Ecrire la matrice A de f dans la base $(e_1; e_2; e_3)$.** **0,5 point**
2) **Déterminer le noyau de f, puis déduire une base de kerf.** **1 point**
3) **On considère l'application linéaire u définie par :**

   $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

   $(x; y; z) \mapsto (x + z; y - z; z - x)$. **Déterminer la matrice de u dans la base canonique $(e_1; e_2; e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.**
0,5 point

II. **On considère l'équation $(E): z^3 = 1$.**

1) **Résoudre (E) dans l'ensemble des nombres complexes.** **0,75 point**
2) **On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.**
   a) **Montrez que $1 + j + j^2 = 0$** **0,25 point**
   b) **Déduire que $\bar{j} = j^2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.** **0,5 point**
3) **Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. A, B et C sont trois points distincts deux à deux d'affixes a, b, c. On rappelle que ABC est un triangle équilatéral direct équivaut à $a - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b)$.**

Démontrez que ABC est équilatéral direct équivaut à $a + bj + cj^2 = 0$. **1 point**

III. **L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.**

1) **On donne $A(2; -2; 2)$ et (P) est le plan d'équation :$x + 2y + 3z - 5 = 0$. Trouvez une équation de la sphère de centre A et tangente au plan (P).** **0,5 point**
2) **On donne $H(2; -1; 3), B(-2; 0; 4), C(0; 2; 2) et D(-1; 0; -2)$. Montrez que ces points ne sont pas coplanaires.** **0,5 point**

IV. **u et v sont les fonctions définies sur $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par $u(x) = \frac{sinx}{cos^3 x}$ et $v(x) = \frac{1}{cos^4 x}$.**

a) **Vérifiez que pour tout x de $I, u'(x) = \frac{3}{cos^4 x} - \frac{2}{cos^2 x}$.** **0,5 point**
b) **Trouvez la primitive de v, sur I, nulle en 0.** **0,5 point**

<u>PARTIE B</u> : EVALUATION DES COMPETENCES 4,5 points

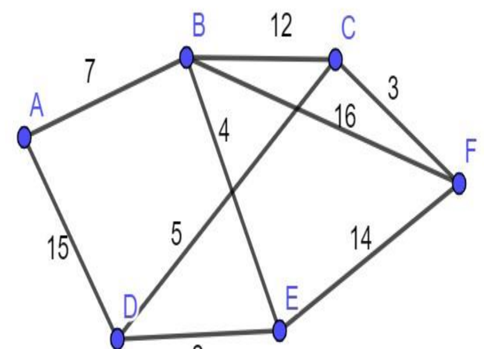

figure 1

Année x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Production y_i	**3**	**4**	**5,1**	**6**	**7,5**	**8**	**9,4**	**10,5**	**11,5**	**13**

Figure 2

<u>Situation</u> : Jean doit livrer son produit à un client du quartier A. La figure 1 ci-dessus est la carte du réseau routier de cette ville sur laquelle on a précisé la consommation en carburant entre deux quartiers. Après la livraison du quartier A, Jean doit aller livrer un client au quartier F. Cependant, il ne dispose plus d'argent sur lui pour se ravitailler en carburant, et son tableau de consommation indique qu'il lui reste 21 litres de carburant dans son réservoir. Et il doit impérativement livrer ce client du quartier F.

Voici 10 ans que Jean regroupe dans un tableau (voir figure 2) la production moyenne en tonne y de son jardin en fonction du nombre d'année x. Il veut savoir si la corrélation entre ces deux caractères est forte pour pouvoir faire désormais des estimations.

La ville de Jean compte actuellement 600 000 habitants. Cette population s'accroit de 8% chaque année. Par ailleurs, chaque année la ville attire 100 000 immigrés. Le maire de cette ville pour maitriser le flux cette immigration et prendre des mesures pour éviter le surpeuplement voudrait savoir dans combien d'années la population de la ville pourra dépasser 8 millions d'habitants.

<u>TACHES</u> :

1) **Jean va-t-il pouvoir trouver un parcours qui lui permettra de livrer le client du quartier F ?**
2) **Peux-tu dire pourquoi Jean dans les années avenir pourra faire des estimations sur sa production ou non ?**
3) **Après combien d'années la population de cette ville va dépasser 8 millions d'habitants ?**