GROUPE DE REPETITION LA COMPETENCE
LIEU : ECOLE PRIMAIRE LA CONNAISSANCE (PK14-PAPASS)
CONTACTS : 697597403 / 671825371

Coef	*TRAVAUX DIRIGES DE MATHS*	Classe	Session
4		Tle D	Février 2023

Proposé par : **M. LONTOUO Senghor** ***(PLETP Electrotechnique)***

Fonction exponentielle népérienne

EXERCICE 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ dans chacun des cas, l'équation ou l'inéquation proposée :

$e^{sinx} = e^{\frac{1}{2}}$; $e^{x^2} \leq \frac{1}{e^2}$; $e^x \leq \frac{1}{e^x}$; $e^{2x} < e^x$; $3(e^x)^2 + e^x - 4 < 0$;

$2e^{-x} = \frac{1}{e^x+2}$; $(e^x - 1)e^x > e^x - 1$. $e^{-2x} - 5e^{-x} + 6 = 0$. $e^{3x} = 4e^x$.

$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$. $e^{x+ln4} > \frac{2}{3}$. $e^{x+2} \geq \frac{3}{e^x}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3e^x - e^{y+3} - 2e^2 = 0 \end{cases}$

EXERCICE 2 :

Calculer la dérivée de la fonction f proposée sur l'intervalle I indiqué.

$f(x) = (x^2 - 2x)e^x; I = \mathbb{R}$. $f(x = \frac{1}{x}e^x; I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $f(x) = \frac{e^x-1}{2e^x+1}; I = \mathbb{R}$.

$f(x) = (sinx + cosx)e^x; I = \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{e^x}{e^x-x}; I = \mathbb{R}$. $f(x) = x - 2(x-1)e^x; I =$

$\mathbb{R}$. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}; I =]0; +\infty[$. $f(x) = 2(x-1)e^{x-1}$; $I = \mathbb{R}$.

$f(x) = cosxe^{sinx}; I = \mathbb{R}$. $f(x) = e^{\frac{1+x}{1+x^2}}$; $I = \mathbb{R}$. $f(x) = e^{-x}lnx; I =]0; +\infty[$

$f(x) = ln(e^{2x} - e^x + 1)$; $I = \mathbb{R}$. $f(x) = e^{xlnx}$; $I =]0; +\infty[$

EXERCICE 3 :

1. Etudier la limite de la fonction f à l'endroit indiqué.

$f(x) = \frac{e^x-1}{2x}$; $en\ 0, en + \infty$ et en $-\infty$. $f(x) = 2xe^{-x}; en + \infty$.

$f(x) = \frac{e^x-1}{2e^x+1}$; $en + \infty$ et en $-\infty$. $f(x) = e^{2x} - e^x + 1$; $en + \infty$ et en $-\infty$.

$f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$; $en + \infty$ et en $-\infty$. $f(x) = \frac{1}{x}(e^{2x} - 1); en\ 0\ et\ en + \infty$

2. f est la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Etudier les limites de f en chacune des bornes de l'ensemble de définition.
3. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$.
   a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C) représentant la fonction f en $+\infty$.

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

4. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2 + xe^x$. Démontrer que la courbe représentative de f a une asymptote oblique en $-\infty$.

EXERCICE 4 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2e^x-3}{e^x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère.

1. Pourquoi les droites (D) et Δ d'équations respectives $y = 2$ et $y = -3$ sont-elles asymptote à (C)?
2.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Etudier les variations de f.
3. Tracer $(D), \Delta$ puis (C).

EXERCICE 5 :

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x + 2 - e^x$

1. Etudier le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$
2. a) Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0; +\infty[$
   b) Prouver que $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$
3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

Partie B : Etude de la fonction f et tracé de la courbe (C_f)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par: $f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}$

1. a) Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$
2. a) Montrer que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$
   b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat
3. a) Etablir que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$
   b) en déduire donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}
4. déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 0$
5. a) Etablir que, $x \in [0; +\infty[$, $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$ où $u(x) = e^x - xe^x - 1$
   b) Etudier les variations de u sur $[0; +\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$
   c) Déduire la position relative de (C_f) par rapport à la tangente (T).
6. Tracer (C_f) et (T).

PARTIE C

On considère les suites (u_n); (v_n) et (w_n) définies sur N par

$u_n = e^{\frac{n+1}{2}}$; $V_n = \ln(u_n)$ et $w_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} \left(2\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) dx$

1.a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique

b) Exprimer $S_n = u_0 + u_1 + \cdots . + u_{n-1}$ en fonction de n

c- Déterminer la valeur maximale n_0 de l'entier naturel n telle que $S_n > 10^6$

2.a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique

b- Exprimer $k_n = V_0 + V_1 + \cdots \ldots \ldots + V_{n-1}$ en fonction de n

a- Déduire en fonction de n le produit $P_n = U_0 U_1 U_2 \ldots . . U_{n-1}$

3) Calculer en fonction de n l'expression $T_n = W_0 + W_1 + W_2 + \cdots . . + W_{n+1}$

EXERCICE 6 :

f est la fonction $x \longmapsto x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et (C) est sa courbe dans un repère orthonormal.

1.

a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$ et $f(x) = x + 1 + \frac{2e^x}{e^x + 1}$.

b) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Démontrer que les droites Δ_1 et Δ_2 d'équations respectives $y = x + 1$ et $y = x - 1$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

d) Préciser les positions relatives de (C) par rapport aux droites Δ_1 et Δ_2.

2.

a) Démontrer que la fonction f est impaire.

b) Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

3. Tracer Δ_1,Δ_2, la tangente au point d'abscisse $x = 0$, puis la courbe (C).

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution et une seule α.

EXERCICE 7 :

PARTIE A

On considère la fonction numérique f de variable réelle x définie par :
$f(x) = \ln(e^x - x) - x - 1$.

1) a) Dresser le tableau des variations de la fonction $g : x \longmapsto e^x - x$.

b) En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $f(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) - 1$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que pour tout réel x strictement négatif on a :
$f(x) = \ln(-x) + \ln\left(1 - \frac{e^x}{x}\right) - x - 1$.En déduire la limite de f en $-\infty$.

c) Déterminer les branches infinies à la courbe de f.

3) a) Calculer la dérivée de f et dresser le tableau des variations de f.

b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α vérifiant l'égalité $e^{\alpha+1} = e^\alpha - \alpha$.

4) Vérifier en plus que $\alpha \in]-0{,}8\,;\,-0{,}7[$ puis tracer la courbe $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthonormé$(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.
Unités d'axes : 1 *cm*.

PARTIE B

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On considère la fonction h définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

a) Étudier les variations de h, puis montrer que $h([0\,;1]) \subset [0\,;1]$.

b) Démontrer que pour tout $x \in [0\,;1]$ on a : $\frac{1}{4} \leq h'(x) \leq \frac{2}{3}$.

c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in [0\,;1]$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

(i) $u_n \in [0\,;1]$,

(ii) $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$,

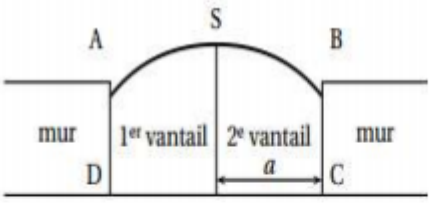
(iii) $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2. Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 8 : Evaluation des compétences

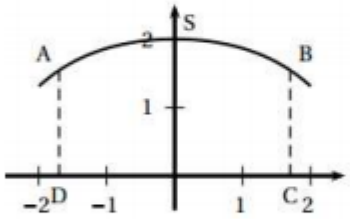
Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure de Mr LONTOUO. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leq 2$.

Dans le modèle choisi, le portail fermé à la forme illustrée par la figure ci-contre. Les côtés [AD] et [BC] sont perpendiculaires au seuil [CD] du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.



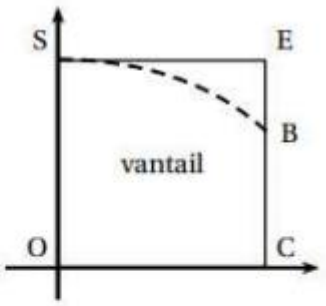
Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2; 2]$ par : $f(x) = -\frac{1}{8}(e^x + e^{-x}) + \frac{9}{4}$

Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-a\,; f(-a))$, $(a\,; f(a))$, $(a\,; 0)$ et $(-a\,; 0)$ et on note S le sommet de la courbe de f, comme illustré ci-contre.

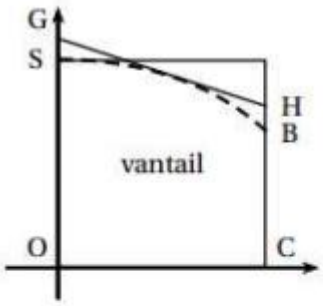


La hauteur du mur étant de 1,5 m. Mr LONTOUO décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à 20 kg.m^{-2}.

Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle OCES, soit un trapèze OCHG comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse 1. La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique.



Forme 1 : découpe dans un rectangle



Forme 2 : découpe dans un trapèze

Tache 1 : A combien de mètres du sol se trouve le point S ?

Tache 2 : Mr LONTOUO va-t-il automatiser son portail ?

Tache 3 : Évaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1 si la largeur d'un vantail est $a = 1{,}8\ m$