



**EVALUATION N° 2 DU TRIMESTRE 1**

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

*L'épreuve comporte deux parties toutes obligatoires réparties sur deux pages.*

**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15 points**

**Exercice 1 05 points**

I/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A_0, A_1$  et  $A_2$  d'affixes respectives  $z_0 = 5 - 4i, z_1 = -1 - 4i$  et  $z_2 = -4 - i$ .  $S$  est la similitude directe qui transforme  $A_0$  en  $A_1$  et  $A_1$  en  $A_2$ .

1. Donner l'écriture complexe de  $S$ . 0,5pt
2. Déterminer le rapport, l'angle et l'affixe  $\omega$  du centre  $\Omega$  de la similitude  $S$ . 0,75pt
3. Donner l'expression analytique de  $S$ . 0,25pt
4. On considère un point  $M$ , d'affixe  $z$  non nul et son image  $M'$  d'affixe  $z'$ .
  - a) Vérifier que  $\omega - z' = i(z - z')$ . 0,25pt
  - b) En déduire la nature du triangle  $\Omega MM'$ . 0,25pt

II/ Pour tout entier naturel, le point  $A_{n+1}$  est défini par  $A_{n+1} = S(A_n)$  et on pose  $U_n = A_n A_{n+1}$ .

1. Placer les points  $A_0, A_1$  et  $A_2$  dans le repère et construire géométriquement les points  $A_3, A_4$  et  $A_5$  et  $A_6$ . 1pt
2. Démontrer que la suite  $(U_n)$  est une suite géométrique. 0,5pt
3. On considère la suite  $(V_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par  $V_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ .
  - a) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ . 0,5pt
  - b) La suite  $(V_n)$  est-elle convergente ? 0,25pt
4. a) Calculer le rayon  $R_n$  du cercle circonscrit au triangle  $\Omega A_n A_{n+1}$ . 0,25pt  
 b) Déterminer le plus petit entier naturel  $p$ , tel que pour tout entier naturel  $n$ , si  $n > p$  alors  $R_n < 10^{-2}$ . 0,5pt

**Exercice 2 05 points**

I/ 1. Soit  $x$  un entier relatif. Démontrer que : 0,5 pt

a)  $3x \equiv 8[10] \Leftrightarrow x \equiv 6[10]$  ; b)  $x^2 \equiv 6[10] \Leftrightarrow (x \equiv 4[10] \text{ ou } x \equiv 6[10])$ .

2. Soit  $n$  un entier naturel.

a) démontrer que  $(n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2 \equiv 0[10] \Leftrightarrow (n + 2)^2 \equiv 6[10]$ . 0,5pt

b) En déduire les entiers naturels, multiples de 10 inférieurs à 2022 qui sont la somme des carrés de trois entiers naturels consécutifs. 0,5pt

3. Démontrer que  $2027^{2023^{2007}} \equiv 3[10]$ . En déduire le *PCGD* de  $2027^{2023^{2007}} + 2022$  et 10. 0,5pt

II/ 1. Soit  $P$  un nombre entier naturel s'écrivant  $ca5$  en base 6 et  $bbaa$  en base 4 respectivement.

a) Montrer  $a + 5$  est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de  $a$ , puis de  $b$  et de  $c$ . 0,5pt

b) Donner l'écriture de  $P$  dans le système décimal. 0,25pt

2. Déterminer les entiers  $\alpha$  et  $\beta$  pour le nombre  $\overline{34\alpha 5\beta}$  soit divisible par 36. 0,5pt

III/ On considère l'équation  $(E): 113x - 35y = 2$ .

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de  $(E)$ . 0,25pt

2. Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$ , l'équation  $(E)$ . 0,5pt

IV/ Démontrer par récurrence que :

1. Pour tout entier naturel  $n, 3^{2n+1} + 2^{6n+3}$  est un multiple de 11. 0,5pt

2. a)  $\sum_{k=1}^n (2k - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$ . 0,25pt

b) En déduire la valeur exacte de  $W = 199^2 + 201^2 + 203^2 + \dots + 2023^2$ . 0,25pt

**Exercice 3** **05 points**

- I/ 1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{x+3}}{x+2}$ . 0,5pt
2. a) Démontrer que  $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right]^2$ . 0,5pt
- b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - 1}{x \sin 5x}$ . 0,5pt
- II/ On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies respectivement par  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^3}$  et  $g(x) = -x^3 - 3x + 2$ . Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(o; \vec{i}; \vec{j})$ .
1. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution réelle  $\alpha$  telle que  $0,5 \leq \alpha \leq 0,6$ . 0,5pt
2. Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ . 0,25pt
3. a) Démontrer que pour tout réel  $x \neq -1$ ,  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(1+x^3)^2}$ . 0,5pt
- b) En déduire les variations de  $f$ . 0,5pt
4. Montrer que  $f(\alpha) = \frac{2}{3\alpha}$ . En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  par deux nombres décimaux d'ordre 1. 0,75pt
5. Soit  $h$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $[\alpha; +\infty[$ .
- a) Démontrer que  $h$  admet une bijection réciproque  $h^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera. 0,5pt
- b) Donner le sens de variation de  $h^{-1}$  sur  $J$ . 0,5pt

**PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES** **05 points****Situation :**

Moussa et Bayang sont deux agriculteurs qui font dans la culture de maïs dans l'arrondissement de Mbé. La plantation de Moussa est assimilable à un triangle  $BON$ , rectangle en  $B$  tel que  $NO = 7$ ; Awe choisit la distance  $BO$  de telle sorte que la longueur du contour de sa plantation soit maximale.

La plantation de Bayang quant à elle est assimilable à un secteur angulaire dont son rayon  $R$  est le module du nombre complexe  $\frac{1}{2} \left[ \sqrt{5+2\sqrt{3}} + i(1-\sqrt{3}) \right]$  et son angle est un argument du nombre

complexe  $\left[ \frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i} \right]^2$ . Mme Souleymanou est une grande commerçante, elle achète du maïs chez Moussa et Bayang directement à la plantation et paie 1250 FCFA le mètre carré.

Par ailleurs, après avoir vendu sa marchandise, Mme Souleymanou souhaite utiliser ses bénéfices pour acheter un terrain rectangulaire dont les dimensions  $x$  et  $y$  sont les entiers naturels vérifiant les relations suivantes :  $PPCM(x; y) + 11PGCD(x, y) = (11101000)_2$ ,  $4 < PGCD(x, y) \leq 29$  et  $x > 8$ .

**Rappel** : l'aire d'un secteur angulaire de rayon  $R$  et d'angle  $\theta$  est  $S = \frac{1}{2} R^2 \theta$ .

**N.B :** les distances dans toutes ces formes géométriques sont exprimées en décimètre.

**Tâches:**

1. Quel est le prix de vente de la production de Moussa à Mme Souleymanou ? 1,5pt
2. Quel est le prix de vente de la production de Bayang à Mme Souleymanou ? 1,5pt
3. Quelles sont les dimensions du terrain que Mme Souleymanou a acheté ? 1,5pt

Présentation : 0,5 pt

Facilitateur : **Médard DAMO**