ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Examinateurs : M. BANWA_Edoire/Ing. HAMADOU Gaga

✍ *La rédaction est un atout dans l'évaluation de la copie du candidat.*

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15.5 points)

Exercice : 1 (3 points)

On désigne par e la base du logarithme népérien. On considère la suite (U_n) de nombres réels définies par : $\begin{cases} U_0 = e^2 \\ U_{n+1} = \sqrt{e^{-1}U_n} \end{cases}$; pour tout entier naturel n.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_n > e^{-1}$. **(1 pt)**
2. Démontrer que U_n est une suite décroissante. **(0.5 pt)**
3. En deduire que U_n converge et détermine sa limite. **(0.5 pt)**
4. Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \dfrac{1 + \ln(U_n)}{2}$, pour tout entier naturel n.
   Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. **(1 pt)**

Exercice : 2 (6.5 points)

1. Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x\ln x - x + 1$.
   (a) Étudier les variations de g sur $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de g. **(0.75**
   (b) En deduire les signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **(0.5 pt)**
2. Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x$.
   (a) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en 1. **(0.5 pt)**
   (b) Déterminer le tableau de variation de f.(On pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$).
   (c) Tracer la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. **(0.75 pt)**
3. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solutions notée α et que $3,5 < \alpha < 3,6$.
4. Soit h la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
   (a) Montrer que α est solution de l'équation $h(x) = x$. **(0.5 pt)**
   (b) On pose $I = [3; 4]$. Montrer que, pour tout x élément de I, on a : $h(x) \in I$ et $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$.
5. On définie la suite (U_n) par $U_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,$U_{n+1} = h(U_n)$.
   Justifier successivement les trois propretés suivantes :
   (a) Pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_n - \alpha|$. **(0.5 pt)**
   (b) Pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \leq (\frac{5}{6})^n$. **(0.5 pt)**
   (c) La suite (U_n) converge vers α. **(0.25 pt)**

Exercice 3 : (2 points)

1. Soit α un nombre réel. Exprimer en fonction de $\cos(\alpha)$ l'expression :
   $A(\alpha) = 4\sin^2(\alpha) + 4\cos(\alpha) - 5$.
2. On suppose que $\alpha \in]0; 2\pi[$. Déterminer suivant les valeurs de α les nombres complexes z_1 et z_2 ; $(z_1 \neq z_2)$ vérifiant : $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2\sin(\alpha) + i \\ z_1 \times z_2 = 1 - \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \end{cases}$. On écrira z_1 et z_2 sous forme algébrique et trigonométrique.

Exercice : 4 **(4 points)**

1. Soit E un plan vectoriel rapporté à la base $B = (\vec{i};\vec{j})$. On considère l'endomorphisme f de E défini par : $f(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = \frac{3}{2}\vec{i} - \vec{j}$.
   (a) Donner la matrice M de f dans la base B. **(0.5 pt)**
   (b) Montrer que f est bijectif et déterminer la matrice M^{-1} de f^{-1}. **(0.75 pt)**
   (c) Soit $D = \{\vec{u} \in E \ tel\ que\ f(\vec{u}) = 2\vec{u}\}$. Démontrer que D est une droite vectorielle dont on donnera une base. **(0.75 pt)**
2. Soit $\vec{e}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{e}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$.
   (a) Montrer que $B' = (\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une base de E. **(0.5 pt)**
   (b) En deduire la matrice M' dans la base B'. **(0.75 pt)**
3. Un nombre s'écrit $\overline{x5y}$ dans un système décimal. Déterminer touts les couples $(x;y)$ pour qu'il soit divisible par 2 et par 9. **(0.75 pt)**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES **(4.5 points)**

Les lettres du tableau ci-dessous représentent les quartiers d'une ville et les nombres la distance, en Km, entre deux quartiers lorsqu'il existe une route entre eux. L'ingénieur François voudrait relier tous ces quartiers par des fibres optiques en partant d'un quartier quelconque et en passant par des routes existantes. L'ingénieur souhaite utiliser un câble vendu à 10.000 F le mètre.

	A	B	C	D	E	F	G
A		2	1				
B			2	1	3		
C				4	3	5	
D					3	6	5
E						1	
F							2
G						2	

Pour ses travaux, L'ingénieur François sollicite une entreprise de production d'objets dont la production journalière est comprise entre 10 000 et 20 000 objets. Toute la production est testée pour repérer les objets défaillants. Cette production est modélisée par la fonction p sur $[1;2]$ par $p(x) = 2e^{x-2} - x + \frac{2}{5}$. L'entreprise voudrait réduire le nombre de produit défaillants.

L'ingénieur François est un sponsor du club de Mathématiques de l'université de Maroua. Le tableau ci-dessous donne la liste des adhérents à ce club jusqu'en 2022 ; Il souhaite octroyer une aide financière à ce club si le nombre d'adhérents dépasse 800 étudiants au cours d'une année.

Rang de l'année(x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Adhérents(y_i)	95	195	240	280	305	320	340	420

☞ **Tâches :**

① Quel est le cout minimal des câbles nécessaire ? **(1.5 pt)**

② Déterminer le nombre d'objets à fabriquer pour que l'entreprise enregistre un minimum de perte. **(1.5 pt)**

③ A partir de quelle année L'ingénieur François pourra-t-il octroyer une aide financière à ce club ?. **(1.5 pt)**