

Département	EXAMEN	Série	Durée	Coef	Date de passage :	Visa A.P.	Visa P.E.
MATHS	BACCALAUREAT BLANC	C	4H00	07	18 Fév. 2022		

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

A- EVALUATION DES RESSOURCES /15points

Exercice 1 : /4points

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5}$

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul, $u_n \leq v_n$. /0,75pt
2. Montrer que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante. /1pt
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes. /0,5pt
4. Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{15}(v_n - u_n)$, puis déduire que (u_n) et (v_n) ont la même limite. /1pt
5. Montrer que la suite (w_n) définie par $w_n = 9u_n + 5v_n$ est constante, puis déduire la limite commune de (u_n) et (v_n) . /0,75pt

Exercice 2 : /4points

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique 2 cm. On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B , d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{z-1}{z+1}$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$. /0,5pt
2. a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1 , on a : $(z' - 1)(z + 1) = -2$ /0,5pt
 - b) En déduire une relation entre $|z' - 1|$ et $|z + 1|$, puis entre $\arg(z' - 1)$ et $\arg(z + 1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1 . /0,5pt
 - c) Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles. /0,5pt
3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1. /0,5pt
4. Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.
 - a) Déterminer la forme exponentielle de $p + 1$. /0,5pt
 - b) Montrer que le point P appartient au cercle (C) . /0,25pt
 - c) Soit Q le point d'affixe $q = -\bar{p}$ où $\bar{p}$ est le conjugué de p .
Montrer que les points A, P' et Q sont alignés dans cet ordre. /0,5pt
 - d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f . /0,5pt

Exercice 3 : /3points

On veut résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E): 3x + 4y = -8$

- 1.a) Vérifier que le couple $(0; -2)$ est une solution de (E) . /0,25pt
- b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) . /0,75pt
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $A(0; -2)$ et la droite $(\Delta): 3x + 4y + 8 = 0$.

- a) Montrer que si M est un point de (Δ) à coordonnées entières, alors la distance AM est un multiple de 5. /0,75pt
- b) Vérifier que si $N(x; y)$ est un point de (Δ) , alors $4AN = 5|x|$. /0,5pt
- c) Dédurre que si AN est un multiple de 5, alors x et y sont des entiers. /0,75pt

Exercice 4: /4points

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - \ln|x|$. (C_g) est la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

- 1.a) Préciser l'ensemble de définition D_g de g , puis calculer les limites de g aux bornes de D_g . /1,25pt
- b) Etudier les variations de g . /0,75pt
- 2.a) Montrer que (C_g) coupe l'axe des abscisses (Ox) en un seul point A dont l'abscisse α est tel que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$. /0,5pt
- b) Etudier la position relative de (C_g) avec la droite $(D): y = x$. /0,5pt
3. On note β un réel quelconque non nul, M et M' les points de (C_g) d'abscisses respectives β et $-\beta$, (T) et (T') les tangentes respectives à (C_g) en M et M'
- a) Exprimer à l'aide de β les coordonnées de N point d'intersection des tangentes (T) et (T') . /0,5pt
- b) Quel ensemble τ décrit par le point N lorsque β parcourt $\mathbb{R}_+^*$? /0,5pt

B- EVALUATION DES COMPETENCES /5points

Intitulé de la compétence: Utilisation des dérivées et des limites pour résoudre des problèmes.

Les mouvements d'une particule qui se déplace sur une trajectoire rectiligne avec une vitesse instantanée g définie en m/s par $g(x) = 1 + x - 3x \ln x$ (x en secondes) ont été enregistrée juste après quelques tierces de son lancement. L'énergie f qu'elle dépense à chaque instant x pour effectuer son déplacement est définie par $f(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^3}$. On rappelle que l'origine des instants est $x = 0$ et que cette particule change de sens de déplacement lorsque sa vitesse change de signe. On rappelle aussi que l'énergie dépensée est positive lorsqu'elle est produite par la particule et négative dans le cas contraire. De plus la particule s'arrête lorsque l'énergie qu'elle produit est très proche de zéro.

Tâche 1: Trouver la vitesse v_0 de cette particule juste quelques tierces (c'est-à-dire pour x très proche de zéro) après son lancement, puis montrer que cette particule changera de sens de déplacement une seule fois à partir d'un instant que l'on notera α . (On ne demande pas de trouver) /1,5pt

Tâche 2: Montrer que l'énergie dépensée par cette particule à l'unique instant α où sa vitesse s'annule est $f(\alpha) = \frac{1}{3\alpha(1+\alpha)^2}$ et justifier qu'au fil d'une très longue durée, son mouvement ne sera plus perceptible /1,5pt

Tâche 3: Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^4}$ et dresser le tableau de variations de l'énergie f . /1,5pt

Présentation : /0,5pt

