

EXAMEN	EPREUVE	CLASSE	GROUPE DE REPETITION SCHOOLEXAMS.FR	COEF	DUREE	SESSION
SEQUENCE N°3	MATHS	Tle C	Tel : +237 654581081	07	04h	Janvier 2023

Epreuve de Mathématiques

Consigne : L'épreuve comporte 2 parties obligatoires pour tous. Clarté de la copie de l'élève exigée

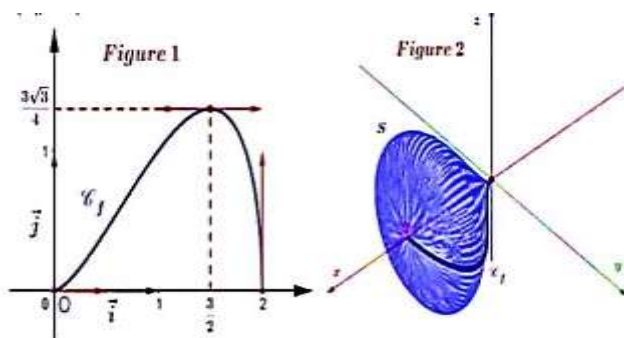
PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES / 15,5 points

EXERCICE 1 / 3 points

- On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation (E) : $2x^2 + y^2 = 139$. où (x, y) désigne un couple d'entiers naturels.
 - Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier a par 3 ? **0,25pt**
 - En déduire les restes possibles de la division euclidienne du carré a^2 d'un entier a par 3. **0,25pt**
 - On suppose que (x, y) est un couple d'entiers naturels vérifiant $2x^2 + y^2 = 139$.
 - Montrer que x est divisible par 3. **0,75pt**
 - Montrer que $x \leq 8$; puis résoudre l'équation (E). **1pt**
- Trois phares A, B et C lancent un signal lumineux respectivement toutes les 25 secondes, les 30 secondes et les 35 secondes. Un signal simultané se produit à 22 heures. A quelle heure se produira le premier signal simultané après minuit ? **0,75pt**

EXERCICE 2 / 07,5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm. La figure 1 est la courbe représentative de la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$.



La rotation de (C_f) au tour de l'axe $(O, \vec{i})$ engendre un solide S ayant la forme de l'oignon représentée en la figure 2. On considère $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la suite (I_n) de terme général $I_n = \int_0^1 (1 - x^n) \sqrt{1 - x^2} dx$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} J_0 = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \\ J_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1 - x^2} dx \end{cases}$$

- Par lecture graphique, déterminer : $f'(\frac{3}{2})$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)}{x-2}$ **0,75pt**
- Dresser le tableau de variation de f **0,25pt**
- On note D le domaine plan délimité par (C_f) , les axes du repère et la droite d'équation $x = 2$. Calculer l'aire du domaine D . **0,75pt**
- Calculer le volume V du solide S **0,75pt**
- Soit G la fonction définie par $G(x) = \int_0^x t\sqrt{2t - t^2} dt$
 - Démontrer que G est dérivable sur $[0; 2]$ puis calculer la dérivée G' de G . **0,5pt**

- b. Démontrer que f est une bijection de $[0; 2]$ vers un intervalle K à préciser
0,5pt
2. Soit H la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par $H(x) = G(1 + \sin x)$
- a. Montrer que H est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et que $H'(x) = \cos^2 x + \sin x \cos^2 x$
0,75pt
- b. Calculer $H\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et déduire que $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], H(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{\pi}{4}$.
0,75pt
3. a. Calculer J_0, J_1 et I_1 puis interpréter géométriquement le résultat de I_1 . **1,5pt**
b. Etudier le sens de variations de la suite (J_n) **0,5pt**
c. Dédurre que les suites (I_n) et (J_n) convergent. **0,5pt**
d. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n dx$ **0,5pt**
e. Dédurre les limites des suites (I_n) et (J_n) . **0,5pt**
4. a. Démontrer que la fonction h définie sur $[0,1]$ par $h(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$ est une primitive de la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ **0,5pt**
5. b. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\forall n \geq 3$,
 $(n+2)J_n = (n-1)J_{n-2}$ **0,75pt**

EXERCICE 3 / 4 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique : 2cm). On considère l'équation d'inconnue z ; (E) : $z^3 - 7iz^2 - 15z + 25i = 0$.

1. a. Montrer que $5i$ est une solution de l'équation (E). **0,25pt**
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **1pt**
2. On considère les points A, B et C d'abscisses respectives $2 + i$; $5i$ et $-2 + i$. La droite (D) d'équation $y = 2$ rencontre la droite (AB) en K et la droite (OA) en L. (Γ) et (Γ') sont les cercles circonscrits aux triangles OAB et ALK respectivement. Soit S la similitude directe qui transforme B en O et K en L ; soit Ω le centre de S.
a. Faire une figure. **0,25pt**
b. Montrer que Ω appartient à (Γ) et (Γ') et qu'il est distinct du point A. **1pt**
c. Déterminer l'écriture complexe de S et donner ses éléments caractéristiques. **1pt**
3. Déterminer l'ensemble (ξ) des points M du plan d'abscisse z tel que $|(1+i)z + 2 - i| =$
4. **0,5pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES/

(04,5 points)

Afin de crypter ou coder et décoder des messages dans une banque, on utilise un chiffrement affine. La banque dispose d'une table de conversion des lettres dont chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Un nombre x est associé à la lettre à coder puis on détermine le reste y de la division euclidienne de $7x + 5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code

la lettre d'origine). Exemple : M correspond à $x = 12$; $7 \times 12 + 5 \equiv 11[26]$ et 11 correspond à la lettre L, donc la lettre M est codé par la lettre L. Sur le manuel d'utilisation de la machine qui gère le codage et le décodage du gestionnaire de la banque est inscrit le système codage-décodage : $y \equiv 7x + 5[26]$ équivaut à $x \equiv 15y + 3[26]$.

Le coffre-fort de la banque admet un code d'ouverture. Sur le manufacturier qui gère le décodage du coffre-fort, est inscrit le code d'ouverture de la forme ab où le nombre a s'écrit 47 en base x et $\overline{53}$ en base y puis le nombre b s'écrit $\overline{144}$ en base x et $\overline{171}$ en base y .

1. Le gestionnaire de cette banque veut envoyer de façon codée le mot «**AMBROISE**» à un autre gestionnaire. Coder ce mot afin que ce mot soit un mot secret. **1,5pt**
2. Le gestionnaire de cette banque vient de recevoir par la boîte e-mail de sa machine le mot «**EZVFPJQCLH**». Décoder ce mot afin de savoir ce que signifie le message. **1,5pt**
3. Déterminer le code de ce coffre-fort **1,5pt**

EXAMINATEUR : **Mr PAMBA DEMLABI, PLEG MATHS**