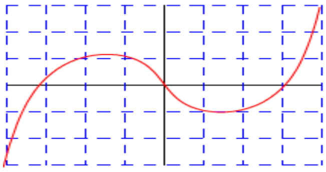
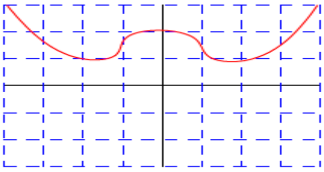
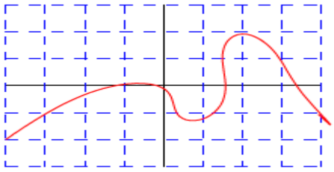
MINESEC
LYCEE BILINGUE DE BOGO
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Année : 2022/2023
Classe PC/D
Prof : Aubin NIVO

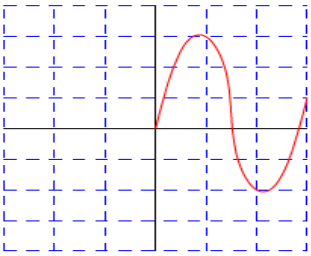
TRAVAUX DIRIGE FONCTIONS

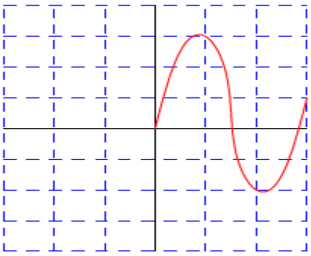
EXERCICE 1

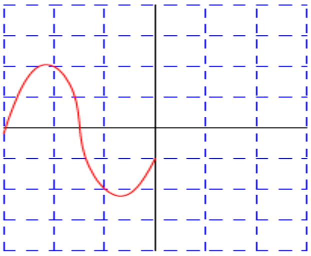
1- Dire si les fonctions dont voici une représentation graphique sont paires ou impaires ou ni paire ni impaire

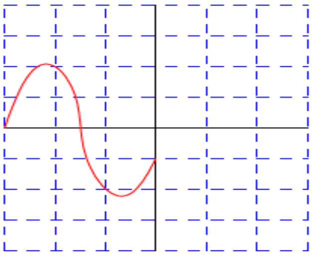




2- Compléter les représentations graphiques des fonctions suivantes pour qu'elles définissent des fonct paires ou impaires


f est paire


f est impaire


f est paire


f est impaire

3- Déterminer la parité de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = -3x^2 + 5$; $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $h(x) = 4x^2 - 3x$

$g(x) = \frac{x}{x^2+7}$; $i(x) = 2x^2 + 5x+3$; $k(x) = 1 + sinx$

4- Montrer que les fonctions définies ci-dessous sont périodique de période T donné

$a)$ $f(x) = sinx$ $T = 2\pi$; b) $g(x) = Tan3x$ $T = 2\pi$

EXERCICE 2

1. Donner le domaine de définition ainsi que la forme de la fonction fog ; gof ; fof et $go\,g$ pour les fonctions f et g définies de la façon suivante :

a- $f(x) = 2x^2 - x$; $g(x) = 3x + 2,$

b- $f(x) = 1 - x^3$; $g(x) = \frac{1}{x}$

c- $f(x) = sin(x)$; $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

d- $\sqrt{2x+3}$; $g(x) = x^2 + 2$

EXERCICE 3

1- Déterminer l'application réciproque des bijections suivantes (en précisant les ensembles):

a- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 3x$

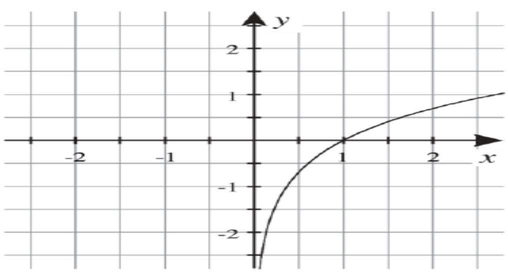
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x + 5$

b- $f_3 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto x^2$

$f_4 : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{\ldots\ldots\}$
$x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$

2-

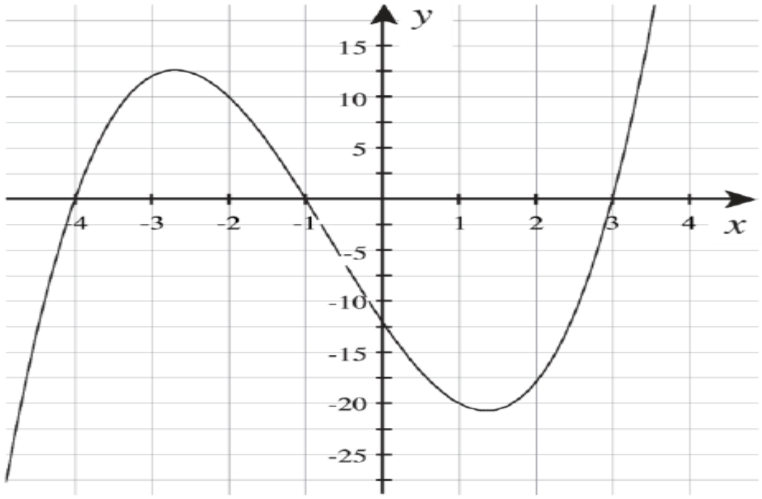
La fonction f représentée ci-dessous est une bijection de IR₊ vers IR . En déduire le graphique de f^{-1}



EXERCICE 4

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ représentée ci-dessous.

a) En déduire puis tracer la fonction g définie par $g(x) = f(x) + 5$.



x	$f(x)$	$f(x) + 5$
-4	0	
-3	12	
-2	10	
-1	0	
0	-12	
1	-20	
2	-18	
3	0	
4	40	

| On obtient la courbe $y = f(x) + c$ par ....

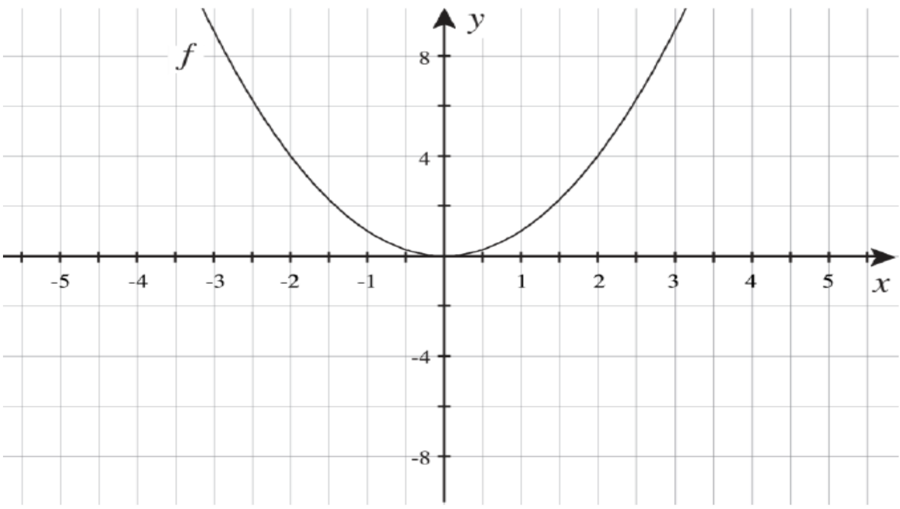
puis tracer la fonction h définie par $h(x) = f(x + 1)$.

EXERCICE 5

On a représenté sur les graphiques suivants la fonction f définie par $f(x) = x^2$

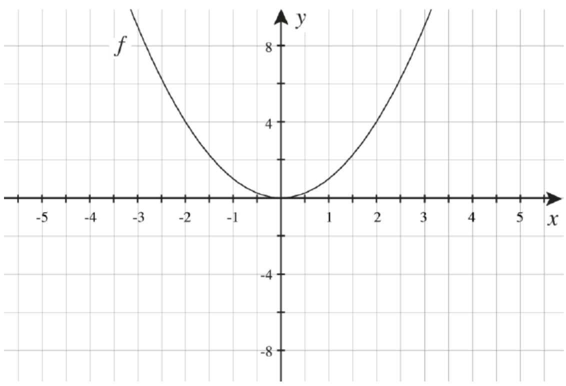
a) Indiquer comment s'obtient les courbes des fonctions g et h á partir de celle de f puis tracer sur ce graphique les courbes de ces fonctions définies par:

$g(x) = f(x) - 4$ puis $h(x) = |f(x) - 4|$



b) Indiquer comment s'obtient les courbes des fonctions g et h á partir de celle de f puis tracer sur ce graphique les courbes de ces fonctions définies par:

$g(x) = f(|x|)$ *puis* $h(x) = f(x - 1) + 2$



EXERCICE 5

1- Soit la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

a) Quel est l'ensemble de définition de g ?

b) Calculer $g(\sqrt{2})$ et $g(\sqrt{3}+1)$

c) Montrer que le point $A\binom{1}{2}$ est centre de symétrie á la courbe de g

d) Déterminer $a\ et\ b$ tels que $g(x) = a + \frac{b}{x-1}$

e) En utilisant une translation et la fonction $u :\ x \mapsto \frac{b}{x}$ tracer la représentation graphique de g

f) Résoudre graphiquement : $g(x) = 0$; $g(x) \geq 0$; $g(x) = 2x - 1$

2- Utiliser la courbe g pour représenter celle de $g^{-1}(x)$

EXERCICE 6

Déterminer Df des fonctions f suivantes puis les limites aux bornes de Df.

1) $f\ (x) = \frac{x^2+3}{1-x}$ 2) $f\ (x) = \frac{x+2}{(x+3)^2}$ 3) $f\ (x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

EXERCICE 7

Soit $f(x) = \frac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$

1) Montrer que si $x > 0$ alors $-\frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \frac{3}{1+\sqrt{x}}$

2) En déduire que f admet une limite en $+\infty$ dont on précisera la valeur

Soit la fonction f définie sur **R**+ par: $f\ (x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$

a) En utilisant la quantité conjuguée, montrer que : $\forall x\ >\ 0, 0\ \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} f\ (x)$.

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ \ x < 0 \\ x - 1 & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f est continue en 0.
2. Montrer que la fonction f est dérivable à gauche et à droite en 0.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Donner une interprétation graphique de ce résultat.
4. Déterminer les équations respectives des demi-tangentes à gauche et à droite à (C_f) en 0.

EXERCICE 9

f est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x}$

1) Calculer les limites de f.

2) Justifier que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout réel sur $x > 0$, $f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$.

3) Etudier le signe de f', puis donner le sens de variation de f.

4) Dresser le tableau de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

5) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 2.

6) Existe-t-il des points de (C_f) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $(D)\colon y = 3x + 5$?

EXERCICE 10

Un fermier décide de réaliser un poulailler de forme rectangulaire long d'un mûr de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de $392\ m^2$. Le but du problème est de savoir où placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale.

La figure ci-dessus représente le poulailler accolé à la ferme en vue de dessus. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre deux piquets A et B. On a donc $x > 0$ et $y > 0$.

1) Sachant que l'aire du poulailler est égale à $392\ m^2$, exprimer y en fonction de x.
2) Démontrer que la longueur $l(x)$ du grillage est : $l(x) = \frac{2x^2+392}{x}$.
3) Calculer la dérivée l' de l. En déduire le tableau de variations de l.
4) En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.

EXERCICE 11

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie sur IR par : $f(x) = \frac{5x+3}{x+3}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f
2) Déterminer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, à gauche et à droite de -3
3) Préciser les équations des asymptotes de la courbe de f
4) Calculer la dérivée de f et en déduire le tableau de variation
5) Ecrire une équation cartésienne de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

6) L'mage de 0 par f est : a) $\frac{1}{3}$; b) 1 ; c) -1

7) L'antécédent de 0 par f est : a) $-\frac{5}{3}$; b)$-\frac{3}{5}$; c) $\frac{3}{5}$

8) Construire soigneusement la courbe de f et sa tangente

9) On pose $h(x) = -f(x)$ et $g(x) = f(-x)$

A) f et h ont même sens de variation

a) vrai ; b) faux

B) f et g ont même sens de variation

a) vrai ; b) faux

C) La courbe de h s'obtient à partir de celle de f par :

a) une translation ; b) symétrie par rapport à l'origine du repère ; c) symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

D) La courbe de h s'obtient à partir de celle de f par :

a) une translation ; b) symétrie par rapport à l'origine du repère ; c) symétrie par rapport à l'axe des abscisses

10) Construire soigneusement la courbe de h dans le même repère
Que celle de f

EXERCICE12

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie sur IR par : $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$ et (C_f)sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $D_f$de f .

2) Calculer la dérivée f' de f et dresser le tableau de variation de la courbe$f$.

3) Construire avec soin la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(O; I; J)$.

4) m étant un paramètre réel, Déterminer graphiquement suivant les valeurs de$m$, le signe et le nombre solutions de l'équation :$\frac{x^3}{3} - x^2 + 1 - m = 0$

EXERCICE 13

On considère la fonction h definie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{x^2+3x+3}{x+2}$ et (C_f) sa courbe representative dans le repère orthonormé $(O; I; J)$

1) Determiner le domaine de definition de h
2) Calculer les limites de h aux bornes de D_h

3) Préciser l'équation de l'asymptote verticale à (C_h)

4) Calculer $h'(x)$ et dresser le tableau de variations de h

5) Demontrer les réels $a; b$ et c tels que pour tout $x \in E$, $h(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$

6) En déduire que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à (C_h)

7) Etudier les positions relatives de (C_h) par rapport à (D)

8) Montrer que le point $A(-2; -1)$ est centre de symétrie de (C_h)

9) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C_h) au point d'abscisse $a = 1$

10) Construis soigneusement (C_h) ; (D) et(T) dans le repère

EXERCICE 14

On considère la fonction f définie sur $E = \mathbb{R}\backslash\{4\}$ par $f(x) = \frac{-x^2+4x-4}{4-x}$ on note (C_f)sa courbe dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

I-

a) Montrer que pour tout x de E on a : $f(x) = x - \frac{4}{4-x}$

b) Calculer les limites de f aux bornes de E.

c) Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C_f)

d) Montrer que le point $K(4; 4)$ est un centre de symétrie pour (C_f)

e) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

f) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.

g) Tracer (C_f).

II- Soit g la fonction définie sur $F = \mathbb{R}\backslash\{-4\,;4\}$ par $g(x) = f(|x|)$. on note (C_g) sa courbe représentative.

a) Etudier la parité de g .

b) Que peut-on en déduire pour la courbe (C_g) ?

c) Comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in E$ et $x \geq 0$.

d) Tracer la courbe (C_g) sur le même graphique que(C_f) .

e) Ressource 1 : Etude et représentation graphique d'une fonction

Ressource 2 : Etude d'une fonction au moyen de sa courbe et du tableau de variation

EXERCICE 15

La courbe (c_f) ci-contre est la representation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormé $(O; I; J)$; f'désigne la fonction dérivée de f .

A laide de ce graphe :

1) Donner l'ensemble de définition D_f de f

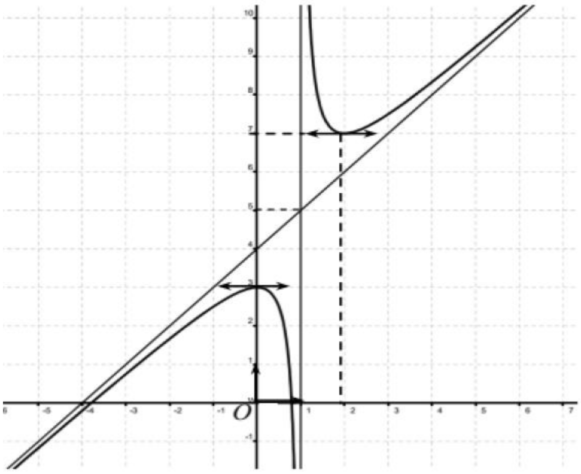
2) Déterminer les extremums de la courbe de f

3) Déterminer les limites aux bornes du D_f et précise l'équation de l'asymptote verticale à (c_f)

4) Déterminer $f(0); f(2); f'(0)$ et $f'(2)$

5) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$f'(x) < 0$; $f'(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) > 0$



6) Déterminer suivant les valeurs du réel θ , le nombre et le signe des solutions de l'équation : $f(x) = \theta$

7) Dresser le tableau de variation de f

8) On suppose que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

a) En se servant de la question 4), justifier que l'on a le système suivant :(S):$\begin{cases} a - c = 0 \\ 2a + b + c = 7 \\ b - c = 3 \end{cases}$

b) Résoudre $\mathbb{R}^3$ dans le système (S)

c) Avec les valeurs de a et b trouvées à la question précédente, vérifier que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ passe par les points $A(-4; 0)et$ $B(1; 5)$

d) Préciser les positions relatives de (c_f) par rapport à son asymptote oblique (D)

9) On suppose dans la suite que : $f(x) = x + 4 + \frac{1}{x-1}$

a) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe de au point d'abscisses $x_0 = 2$