



Samedi, 28 Janvier 2023

EPREUVE DE MATHEMATIQUES N°1 DU 2^{ème} TRIMESTRE

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (4,25 points)

- (a) Détermine les racines carrées du nombre complexe $\Delta = -3 + 4i$. **0,5pt**

(b) Déduis-en les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2 + (3 - 6i)z - 6 - 10i = 0$. **0,5pt**
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2 + 2i$, $z_B = i$ et $z_C = -1 + 4i$.

(a) Place les points A, B et C dans le repère. **0,5pt**

(b) Détermine la nature du triangle ABC . **0,5pt**

(c) Détermine l'abscisse du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. **0,5pt**
- Pour tout nombre complexe $z \neq i$, on pose : $Z = \frac{z+1-4i}{z-i}$.

(a) Détermine et construis l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'abscisse z tel que $|Z| = 1$. **0,5pt**

(b) Détermine et construis l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'abscisse z tel que Z soit imaginaire pur. **0,75pt**
- On pose, pour tout entier $n \geq 1$; $z_n = (z_A)^n$. Ecris z_n sous forme trigonométrique. **0,5pt**

EXERCICE 2 : (3,25 points)

Soit h la fonction définie sur $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right[$ par $h(x) = \sqrt{x + \frac{3}{4}}$.

- Résous l'équation $h(x) = x$. **0,5pt**
- Montre que pour tout $x \in I = \left[0; \frac{3}{2}\right]$, on a :

(a) $h(I) \subset I$. **0,5pt**

(b) $\frac{1}{3} \leq h'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, puis, que $\left|h(x) - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left|x - \frac{3}{2}\right|$. **1pt**
- Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = h(U_n)$.

(a) Montre que pour tout entier naturel non nul n , on a : $\left|U_n - \frac{3}{2}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \times \frac{3}{2}$. **0,75pt**

(b) Déduis-en que la suite (U_n) converge vers un réel l à déterminer. **0,5pt**

EXERCICE 3 : (3,25 points)

Un car loué par un Lycée pour sa colonie de vacance doit effectuer un trajet de 1500km . Lorsque ce car roule à la vitesse moyenne x , exprimée en km/h , la dérivée de sa consommation $C(x)$, exprimée en litres pour 100km , selon les études d'un expert sur ce type de véhicule, est donnée par la relation : $C'(x) = -\frac{300}{x^2} + \frac{1}{3}$. Une information complémentaire fournie par le chauffeur au moment de la location du car est qu'il consomme 25 litres aux 100km pour une vitesse moyenne

de 60 km/h . Le salaire horaire du chauffeur est de 900 FCFA et le litre de gasoil coûte 600 FCFA.

1. Détermine la formule donnant la consommation en litres pour 100 km . **0,75pt**
2. Montre que le coût total du voyage est $P(x) = \frac{4050000}{x} + 3000x$. **1pt**
3. Détermine la vitesse moyenne à laquelle le chauffeur doit rouler pour minimiser le coût total du voyage. Quel est alors le coût de l'organisation de cette colonie ? **1,5pt**

EXERCICE 4 : (4,25 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 + \ln x$. Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprète graphiquement le résultat. **1pt**
2. (a) Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variation de f . **0,75pt**
 (b) Montre que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. **0,5pt**
 (c) Dresse le tableau de variation de f^{-1} , fonction réciproque de f . **0,5pt**
3. Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0,6 < \alpha < 0,7$. **0,75pt**
4. Construis la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm . **0,75pt**

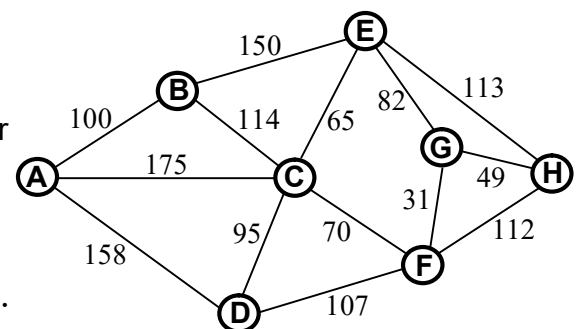
PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

SITUATION :

Une société fabrique et commercialise les produits cosmétiques. Les relevés, en millions de FCFA des frais publicitaires mensuels de la société et de son chiffre d'affaires mensuel sont consignés dans le tableau ci-dessus. Le directeur commercial veut investir davantage dans la publicité pour que le chiffre d'affaires mensuel atteigne 100 millions de FCFA.

Frais publicitaires	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires	60	66	69	75	81

Le directeur commercial de cette société rend visite à ses fournisseurs. Il se rend du site A au site H et souhaite effectuer le moins de kilomètres possibles. Son assistant dresse un graphe qui schématise les trajets, en km , entre les six villes de la région, notées B, C, D, E, F, G et les deux sites A et H .



Un expert en finances et ami du directeur commercial, ayant obtenu les chiffres sur l'évolution financière de la société fait une modélisation des frais publicitaires par la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = 3x - x \ln(0,5x)$ (en millions de FCFA) où x désigne le nombre de mois d'existence de la société.

Tâches :

1. Détermine, en utilisant la méthode des moindres carrés, le montant d'argent à investir dans la publicité afin d'atteindre le chiffre d'affaires mensuel de 100 millions de FCFA. **1,5pt**
2. Détermine l'itinéraire le plus court reliant les deux sites A et H et indique sa longueur. **1,5pt**
3. A partir de quel mois la société va enregistrer une baisse des frais publicitaires ? **1,5pt**

Présentation générale : 0,5pt