REPUBLIQUE DU CAMEROUN
MINESEC / DRLT / DDSM
COLLEGE POLYVALENT GEORGES SCHWAB EDEA

Année scolaire : 2022-2023
Classe : T^{le} C
Durée : 4h Coefficient : 7
Prof : T. N. AWONO MESSI

Samedi, 28 Janvier 2023

EPREUVE DE MATHEMATIQUES N°1 DU 2ème TRIMESTRE

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points $A(1,-1,1)$, $B(0,0,1)$ $C(-2,0,3)$ et $D(-2,0,1)$. On note (P) le plan d'équation $2x+y-z=0$ et $\mathscr{S}$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2+2x+4y-4z-1=0$. Dans l'ensemble $\mathscr{W}$ des vecteurs de l'espace, on considère l'endomorphisme f défini par $f\left(\vec{i}\right)=\vec{i}$, $f\left(\vec{j}\right)=2\vec{j}-\vec{k}$, $f\left(\vec{k}\right)=-4\vec{j}+2\vec{k}$.

1. **(a)** Montre que les points A, B et C définissent un plan et précise son équation. **0,75pt**

   (b) Vérifie que $ABCD$ est un tétraèdre et calcule son volume $\mathscr{V}$. **0,5pt**

2. **(a)** Détermine la nature et les éléments géométriques de $\mathscr{S}$. **0,5pt**

   (b) Détermine l'intersection de $\mathscr{S}$ et (P). **0,75pt**

3. **(a)** Ecris la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. **0,25pt**

   (b) Détermine le noyau $\ker f$ et l'image $\operatorname{Im} f$ de f. Précise une base de chacun d'eux. **1pt**

4. Soit $\mathscr{B}'=\left(\vec{i},\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ avec $\vec{e_1}=2\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{e_2}=2\vec{j}-\vec{k}$.

   (a) Montre que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{W}$. **0,5pt**

   (b) Détermine la matrice N de f dans la base $\mathscr{B}'$ et calcule N^2. **0,75pt**

EXERCICE 2 : (3 points)

Soit h la fonction définie sur $\left[-\frac{3}{4};+\infty\right[$ par $h(x)=\sqrt{x+\frac{3}{4}}$.

1. Résous l'équation $h(x)=x$. **0,5pt**

2. Montre que pour tout $x\in I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$, on a :

   (a) $h(I)\subset I$. **0,5pt**

   (b) $\frac{1}{3}\leq h'(x)\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$, puis, que $\left|h(x)-\frac{3}{2}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{3}}\left|x-\frac{3}{2}\right|$. **0,75pt**

3. Soit la suite (U_n) définie par $U_0=0$ et $U_{n+1}=h(U_n)$.

   (a) Montre que pour tout entier naturel non nul n, on a : $\left|U_n-\frac{3}{2}\right|\leq\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n\times\frac{3}{2}$. **0,75pt**

   (b) Déduis-en que la suite (U_n) converge vers un réel l à déterminer. **0,5pt**

EXERCICE 3 : (3,5 points)

Le plan $\mathscr{P}$ complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$, on considère les points M et F d'affixes respectives z et $1+i$.

1. Montre que l'ensemble des points M tels que $z+\bar{z}+4=0$ est une droite $(\mathscr{D})$. **0,25pt**

2. Démontre que la distance du point M à la droite ($\mathscr{D}$) est $\frac{1}{2}\left|z+\bar{z}+4\right|$. **0,5pt**

3. Démontre que l'ensemble $\mathscr{H}$ des points M du plan d'affixe z tels que $\left|\frac{-2z+2+2i}{z+\bar{z}+4}\right|=\sqrt{3}$ est une conique et donne sa nature, un foyer, une directrice et son excentricité. **1pt**

4. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-4i\sqrt{3}z-16=0.$ **0,5pt**

5. On considère les points P et Q d'affixes respectives $p=2+2i\sqrt{3}$ et $q=-2+2i\sqrt{3}$.
   - **(a)** Ecris chacun des nombres complexes p et q sous la forme trigonométrique. **0,5pt**
   - **(b)** Ecris le nombre $\frac{p}{q}$ sous la forme exponentielle et donne la nature du triangle OPQ. **0,5pt**

EXERCICE 4 : (3,5 points)

1. Montre par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, 3 divise $2^{2n}-1$. **0,75pt**
2. Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E):12x-5y=3.$ **0,75pt**
3. Détermine les couples $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ tels que $3PGCD(a;b)+2PPCM(a;b)=11.$ **1pt**
4. Soit $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_{a,b}(x)=a\sin x+b\sin^3 x$ où $a,b\in\mathbb{R}$.
   - **(a)** Montre que $f''_{a,b}(x)=(6b-a)\sin x-9b\sin^3 x.$ **0,5pt**
   - **(b)** Déduis-en les primitives de $f_{a,b}$ sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**

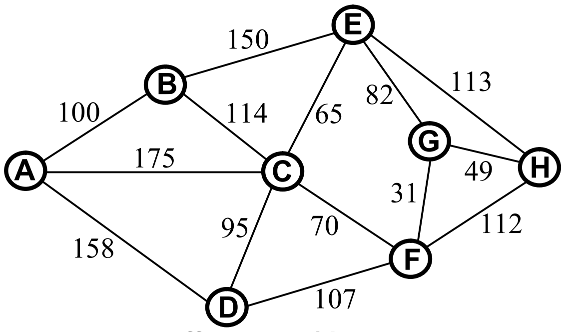
PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

<u>SITUATION</u> :

Une société fabrique et commercialise les produits cosmétiques. Les relevés, en millions de FCFA des frais publicitaires mensuels de la société et de son chiffre d'affaires mensuel sont consignés dans le tableau ci-dessus. Le directeur commercial veut investir davantage dans la publicité pour que le chiffre d'affaires mensuel atteigne 100 millions de FCFA.

Frais publicitaires	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires	60	66	69	75	81

Le directeur commercial de cette société rend visite à ses fournisseurs. Il se rend du site A au site H et souhaite effectuer le moins de kilomètres possibles. Son assistant dresse un un graphe qui schématise les trajets, en km, entre les six villes de la région, notées B,C,D,E,F,G et les deux sites A et H.



Un expert en finances et ami du directeur commercial, ayant obtenu les chiffres sur l'évolution financière de la société fait une modélisation des frais publicitaires par la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=3x-x\ln(0,5x)$ *(en millions de FCFA)* où x désigne le nombre de mois d'existence de la société.

Tâches :

1. Détermine, en utilisant la méthode des moindres carrés, le montant d'argent à investir dans la publicité afin d'atteindre le chiffre d'affaires mensuel de 100 millions de FCFA. **1,5pt**
2. Détermine l'itinéraire le plus court reliant les deux sites A et H et indique sa longueur. **1,5pt**
3. A partir de quel mois la société va enregistrer une baisse des frais publicitaires ? **1,5pt**

Présentation générale : 0,5pt