

MINESEC	TRAVAUX DIRIGES (Barycentres, dénombrements et trigonométries)	ANNEE SCOLAIRE 202/2023
COLLEGES MARIE ALBERT		CLASSE : PREMIERE D
DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES		
Première fiche de TD (Janvier 2023)		Proposée par JULES KENFACK

THEME 1 : (BARYCENTRES)

EXERCICE 1 :

EFG est un triangle isocèle en F tel que $EF = 6\text{cm}$ et $EG = 9\text{cm}$. I est le milieu de $[EG]$ et H un point tel que : $3\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{FE} + 2\overrightarrow{EG} = \vec{0}$

1. Faire la figure
2. Ecrire H comme barycentre des E, F et G .
3. Ecrire H comme barycentre des F et I . Que représente la droite (IF) pour le segment $[EG]$?
4. On considère un point M du plan et f une application du plan tel que : $f(M) = 2ME^2 - MF^2 + 2MG^2$
 - a. Ecrire $f(M)$ en fonction de MH, EH, FH et GH .
 - b. Calculer FI , puis IH .
 - c. En déduire les valeurs de EH^2, FH^2 et GH^2 .
 - d. Déterminer et construire l'ensemble (L) des points M du plan tels que : $f(M) = 69$

EXERCICE 2 :

ABC est un triangle isocèle tel que $AB = AC = 7\text{cm}$ et $BC = 4\text{cm}$. I est le milieu de $[BC]$ et G un point tel que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

1. Que représente le point G pour le triangle ABC ?
2. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{L})$ des points M du plan tels que $6 \leq \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \leq 9$. Calculer l'aire de $(\mathcal{L})$.
3. Calculer les distance AI, AG et BG .
4. Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M du plan tels que : $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 65$.

EXERCICE 3 :

On considère dans le plan, les points A, B et C affecté respectivement des coefficients 2, 3 et 2 et les points E, F et K tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, F est le milieu du segment $[AC]$, $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ et $G = \text{bar}\{(A; 2); (B; 3); (C; 2)\}$

1. Montrer que les points C, G et E sont alignés.
2. Démontrer que les droites (CE) , (AK) et (BF) sont concourantes.

3. On suppose que $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- a. Calculer les coordonnées du point G .
- b. Calculer AC .

4. On considère un point M du plan tel que $AM^2 + CM^2 = 52$.

- a. Justifier que $AM^2 + CM^2 = 2MF^2 + \frac{AC^2}{2}$
- b. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{H})$ des points M du plan tels que : $AM^2 + CM^2 = 52$.
- c. Déterminer une équation cartésienne de $(\mathcal{H})$.
- d. Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine défini par $(\mathcal{H})$.

EXERCICE 4

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $E(1; -3)$ et $F(1; 3)$ deux points du plan.

1. Déterminer les coordonnées du point J tel que E et F soient symétriques par rapport au point J .
2. Justifier que pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = MJ^2 - \frac{EF^2}{4}$

- En déduire la nature de (γ) ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 7$ Puis, construire (γ) .
- Donner une équation cartésienne de (γ) .

EXERCICE 5 :

On considère un carré $ABCD$ de sens direct, de centre O et tel que $AB = 2\text{cm}$. Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 3); (B, 2); (C, 3)$ et $(D, 7)$.

- Montrer que $G \in (BD)$.
- Montrer que $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DO}$
- Construire le point G .
- On se propose de déterminer et construire l'ensemble (γ) des points M du plan tel que : $3AM^2 + 2BM^2 + 3CM^2 + 2DM^2 = 40$
 - Montrer que : $3AM^2 + 3CM^2 = 6OM^2 + 12$ et $2BM^2 + 2DM^2 = 4OM^2 + 8$.
 - Montrer que : $M \in (\gamma) \Leftrightarrow OM = \sqrt{2}$.
 - Montrer que $A \in (\gamma)$ puis en déduire la nature de (γ) .
 - Construire (γ) .

EXERCICE 6 :

On considère un triangle ABC tel que $AB = 4\text{cm}$ et $CA = CB = 6\text{cm}$, M un point du plan, m un réel non nul et I le milieu du segment $[AB]$.

- Pour quelle valeur de m , le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}$ est-il indépendant du point M .
- Démontrer que si $m = -2$, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires.
- Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = 2$.

EXERCICE 7 :

On considère trois points $A; B$ et C non alignés tels que $BC = 6\text{cm}$ et $CA = AB = 5\text{cm}$, I le milieu du segment $[BC]$.

- Faire la figure, calculer $\cos \hat{A}$ et montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7$.
- G est le barycentre des points pondérés $(A, 1); (B, 3)$ et $(C, 3)$. Construire G puis calculer GA et GB .
- Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4$
- f est l'application du plan qui à tout point M du plan associe le réel

$$f(M) = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$$
 - Montrer que $f(M) = f(G) + 4MG^2$.
 - Calculer $f(A)$ et $f(B)$.
 - Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que $f(M) = f(G) + 36$.

EXERCICE 8 :

ABC est un triangle tel que $BC = 8\text{cm}$ et $CA = 10\text{cm}$ $AB = 12\text{cm}$ $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$

- Construire le triangle et le point G .
- Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = AC$.
- (F) désigne l'ensemble des points N du plan tels que : $\|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\|$
 - Montrer que le point B appartient à (F) .
 - Déterminer et construire l'ensemble (F)

THEME 2 : DENOMBREMENT

EXERCICE 1 :

Quatre voyageurs laissent en sortant, les clés de leur chambre au réceptionniste d'un hôtel. Celui-ci rend au hasard les clés aux quatre voyageurs à leur retour.

- De combien de façon peut-il rendre les clés aux voyageurs ?

2. Déterminer le nombre de façons différentes de rendre les clés si :
 - a. Chaque voyageur retrouve sa clé.
 - b. Un seul voyageur retrouve sa clé.
 - c. Deux voyageurs uniquement retrouvent leurs clés.
 - d. Aucun voyageur ne retrouve sa clé.

EXERCICE 2 :

Une urne contient n pièces de 1 fcfa et $n + 1$ pièces de 2 fcfa. Les pièces sont distinctes les unes des autres. On tire successivement et avec remise deux pièces de l'urne et on s'intéresse à la somme S des chiffres que présentent les pièces tirées.

1. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $n^2 + (n + 1)^2 = 25$.
2. Quelles sont les valeurs possibles de S .
3. Déterminer le nombre de tirage où S est impair.
4. Déterminer le nombre de tirage P où S est pair puis, déterminer n si $P = 25$.
5. On suppose que $n = 3$ et on tire simultanément deux pièces de l'urne.
 - a. Déterminer le nombre de tirages possibles.
 - b. Déterminer le nombre de tirages possibles comportant les pièces marquées du même nombre.

EXERCICE 3

I. Soit n et p deux entiers naturels tel que $p \leq n$. Montrer que :

$$a) \quad A_{n+1}^{p+1} = (n + 1)A_n^p \qquad b) \quad \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n^2}{(n+1)!}$$

II. Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations :

$$a) \quad C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7}{2}n \qquad b) \quad C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{3n}^3 = 387 \qquad c) \quad C_{n-1}^{n-5} = 3C_{n-3}^{n-7}$$

III. Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système :
$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+1} \\ 4C_x^y = 5C_x^{y-1} \end{cases}$$

EXERCICE 4 :

Une entreprise emploie 50 personnes dont 20 femmes. Une enquête révèle que 16 employés de cette entreprise, dont 5 femmes ont une assurance maladie.

I. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

	Avec assurance maladie	Sans assurance maladie	total
Femmes	5		20
Hommes			
Total	16		50

II. Les employés de cette entreprise décident de protester contre leurs conditions de travail. L'employeur leur propose de négocier. Ils décident alors de se faire représenter par une délégation de 4 personnes à la table des négociations.

Déterminer, dans chacun des cas suivants, le nombre de différentes délégations possibles qu'ils peuvent constituer.

1. Chaque délégation comporte exactement une femme et exactement deux personnes sans assurances maladie.

2. Chaque délégation comporte au moins une femme sans assurance maladie.

EXERCICE 5 :

I. Dans une classe de 70 élèves, 13 aiment les mathématiques et la chimie, 15 aiment Les physiques et la chimie, 16 aiment les mathématiques et les physiques. 7 Aiment les trois matières, 8 n'aiment que les mathématiques, 9 n'aiment que les physiques et 10 n'aiment que la chimie.

1. Combien d'élèves n'aiment aucune des trois matières ?
2. Combien d'élèves aiment deux et seulement deux des trois matières ?

II. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 ayant des jetons indiscernables au toucher. Sur les jetons de U_1 , deux portent le nombre 75 et trois portent le nombre 125. Sur ceux de U_2 , quatre portent le nombre -200 et un le nombre 200.

On extrait simultanément 2 jetons de U_1 et un jeton de U_2 et ensuite on note S la somme des nombres inscrits sur les trois jetons tirés.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles
2. Préciser le nombre de valeurs de la somme S .
3. Trouver le nombre de tirages dont $S = 0$

III. Un sac contient huit boules indiscernables au toucher et portant les numéros : 1; 1; 1; 3; 3; 4; 4; 12
On tire au hasard et simultanément deux boules de ce sac.

1. Détermine le nombre de résultats possibles.
2. X désigne le produit des numéros des deux boules tirées du sac.
 - a) Dresser l'ensemble de toutes les valeurs de X .
 - b) Combien ya-t-il de résultats tels que $X = 12$.

IV. Une urne contient trois boules noires et deux boules blanches. On tire simultanément deux boules de cette urne.

1. Combien ya-t-il de tirages possibles ?
2. Combien ya-t-il de tirages possibles ayant des boules unicolores ?
3. Sachant que le tirage d'une boule blanche fait perdre 50 *fcfa* et le tirage d'une boule noire fait gagner 100 *fcfa*. X désigne le montant (gain ou perte) obtenu à l'issu d'un tirage.
 - a) Déterminer l'ensemble Ω des différents montants.
 - b) Déterminer le nombre de tirages possibles pour chacun de ces montants.

V. Une urne contient deux boules vertes, une boule rouge et boules jaunes. $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue un tirage simultané de deux boules de l'urne. Soit w_n , le nombre de résultats possibles.

1. Vérifier que $W_1 = 6$
2. Vérifier que $W_n = \frac{n^2+5n+6}{2}$
3. Déterminer n si $W_n = 50 \times 99$

THEME 3 : TRIGONOMETRIE

EXERCICE 1 : On donne le polynôme p définie par : $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + x + 3$

1. Calculer $p(1)$, puis en déduire les solutions de l'équation $P(x) = 0$.
2. A partir de la première question, résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation $4\cos^3 x - 8\cos^2 x + \cos x + 3 = 0$.
3. Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 2 : On considère l'équation (E): $8x^3 - 4\sqrt{3}x^2 - 2x + \sqrt{3} = 0$

1. Vérifier que $\frac{1}{2}$ est une solution de (E) et justifier que $4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2$
2. A partir de la première question, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).
3. A partir de la première question, résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation :
 $8\sin^3 x - 4\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x + \sqrt{3} = 0$.
4. Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 3 :

A.

- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x - 2 = 0$
- b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\frac{-\cos 2x + 2}{\cos 2x} = \cos 2x$

B. On considère l'expression $P(x) = \cos 4x - 5\cos 2x - 6$, dans laquelle x est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi[$.

- a) Justifier que $P(x) = 2\cos^2 2x - 5\cos 2x - 7$.
- b) Résoudre dans $]-\pi; \pi[$ l'équation $P(x) = 0$.
- c) Placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

C. $A(x) = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 1$.

- a) Montrer que $A = -\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x$
- b) Résoudre dans $]-\pi; \pi[$ l'équation $A(x) = 1$.
- c) Résoudre dans $]-\pi; \pi[$ l'inéquation $A(x) \leq 1$.

D. $D(x) = -6\sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3$

- a) Montrer que $A = 3\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$
- b) Résoudre dans $]0; 2\pi]$ l'équation $D(x) + \sqrt{3} = 0$.
- c) Résoudre dans $]0; 2\pi]$ l'inéquation $D(x) \geq -\sqrt{3}$

E. $B(x) = \sin 2x - \cos 2x + \cos x - \sin x - 1$

- a) Montrer que $B(x) = (2\cos x - 1)\sin x + (1 - 2\cos x)\cos x$
- b) Factorise $B(x)$.
- c) Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $B(x) = 0$
- d) Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

F. Résoudre dans $[-\pi; \pi]^2$ le système d'équation (S) $\begin{cases} 2\sin x + 5\cos y = -4 \\ 3\sin x - 2\cos y = \frac{7}{2} \end{cases}$

G. Soit l'équation (E): $\sin 2x = \cos x + \sin x - \frac{1}{2}$ On pose $u = x - \frac{\pi}{4}$

- a) Montrer que : $(E) \Leftrightarrow 2\cos^2 u - \sqrt{2}\cos u - \frac{1}{2} = 0$
- b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos^2 u - \sqrt{2}\cos u - \frac{1}{2} = 0$.
- c) En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions de (E).

H. Justifier que $\cos^3 a = \frac{1}{4}(\cos 3a + 3\cos a)$

En déduire la valeur exacte de : $A = \cos^3 \frac{\pi}{12} + \cos^3 \frac{5\pi}{12} + \cos^3 \frac{7\pi}{12} + \cos^3 \frac{11\pi}{12}$