

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (3,5 points)

Le tableau suivant donne la production agricole y_i en tonnes, en fonction de la taille x_i , en hectares de l'exploitation, pour un ensemble de six exploitations d'une localité d'un pays.

x_i (en ha)	1	2	3	4	5	6
y_i (en t)	12	30	42	60	48	54

1. Construis le nuage de points associés à cette série statistique double. 1pt
(On prendra 1cm pour un hectare en abscisse et 1cm pour 10 tonnes en ordonnées)
2. Détermine le point moyen G et place-le sur la figure. 0,5pt
3. Calcule la variance de x et la covariance de x et y . 1pt
4. Donne une équation cartésienne de la droite de régression de y en x . 0,5pt
5. Donne une estimation de la production d'un domaine de 8 hectares. 0,5pt

EXERCICE 2 : (3 points)

Soit le polynôme P à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i$.

1. Montre que $P(2i) = 0$. 0,5pt
2. (a) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$. 0,5pt
(b) Résous dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$. 0,75pt
3. Soient $z_A = 1+i$ et $z_M = x+iy$ avec x et y des nombres réels. Soit \mathcal{E} l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que : $|z_M - z_A| = 4$.
(a) Montre que le point B d'affixe $z_B = -3+i$ appartient à \mathcal{E} . 0,5pt
(b) Détermine, puis représente l'ensemble \mathcal{E} . 0,75pt

EXERCICE 3 : (4,5 points)

I) Soit g la fonction définie sur $I = [2; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x^2}{2x-2}$.

1. Etudie le sens de variation de g sur I . 0,5pt
2. Soit la suite définie par : $U_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = g(U_n)$.
(a) Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \geq 2$. 0,75pt
(b) Montre que la suite (U_n) est décroissante. 0,5pt
(c) Dédus-en que (U_n) est convergente et détermine sa limite. 0,75pt

II) On considère dans \mathbb{C} l'équation $(E) : 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3+i\sqrt{3})z - 4 = 0$.

1. Détermine les racines carrées de $\Delta = 6 + 6i\sqrt{3}$. 0,5pt

2. Résous dans \mathbb{C} l'équation $2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$. 0,75pt
3. (a) Développe et réduis l'expression $(2z + 1)(2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4)$. 0,5pt
 (b) Déduis-en les solutions de (E). 0,25pt

EXERCICE 4 : (4 points)

Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{1}{4}(U_n^3 + 1)$. On définit sur l'intervalle $I = [0; 1]$ la fonction f par $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1)$.

1. Etudie les variations de f , puis montre que $f(I) \subset I$. 0,75pt
2. Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \in I$. 0,5pt
3. Soit g la fonction définie sur $I = [0; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$.
 (a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur I une solution unique α . 0,5pt
 (b) Donne un encadrement de α à 10^{-1} près. 0,5pt
4. (a) Montre que pour tout $x \in I, |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$. 0,5pt
 (b) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|U_n - \alpha|$, puis déduis-en que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$. 0,75pt
 (c) Justifie alors que la suite (U_n) converge et précise sa limite. 0,5pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

SITUATION :

Une entreprise fabrique et vend des téléphones portables. Sa capacité journalière de production est comprise entre 0 et 18 portables. On suppose que toute la production est vendue. Le coût de production en milliers de FCFA de x portables est donné par $C(x) = x^3 - 25x^2 + 280x + 400$ et la recette de la vente de x téléphones portable est donnée par $R(x) = 480x - 20x^2$.

Le tableau ci-dessous donne les chiffres d'affaires trimestriels, en millions de FCFA, pour les années 2020 et 2021 de cette entreprise.

	2020				2021			
Rang du trimestre x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires trimestriel y_i	330	325	305	290	282	285	260	238

M. BELL travaille dans cette entreprise. Au début de sa carrière, il place un capital initial de 2 millions de FCFA dans une banque, au taux de 10% d'intérêts composés annuels. Avec l'argent qu'il aura capitalisé au bout de 25 ans, il envisage construire plus tard une maison dont le coût s'élèvera à 20 millions de FCFA du fait de l'inflation du coût des matériaux de construction.

Tâches :

1. Détermine le nombre de téléphones à produire et à vendre par jour pour que le bénéfice soit maximal. 1,5pt
2. Détermine le chiffre d'affaires de l'entreprise au deuxième trimestre de l'année 2022. 1,5pt
3. M. BELL pourra-t-il construire cette maison avec son épargne ? 1,5pt

Présentation générale: 0,5pt