

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (2,5 points)

1. (a) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 13x - 84y = 7$. 0,75pt
 (b) Montre que pour tout couple (a, b) solution de (E) , on a : $PGCD(a; b) = 1$ ou $PGCD(a; b) = 7$. 0,75pt
2. Détermine les solutions (a, b) de (E) telles que a et b soient premiers entre eux. 0,5pt
3. Détermine les solutions (a, b) de (E) telles que : $PGCD(a, b) = 7$. 0,5pt

EXERCICE 2 : (3,25 points)

On considère la fonction définie f sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos 2x - 2 \cos x$.

1. Etudie la parité de f et montre que f est périodique de période 2π sur \mathbb{R} . 0,5pt
2. Montre que la dérivée f' de f est définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = 2 \sin x (1 - 2 \cos x)$. 0,5pt
3. Etudie le signe de f' sur l'intervalle $[0; \pi]$. 0,75pt
4. Dresse le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0; \pi]$. 0,5pt
5. Construis la courbe \mathcal{C} de f sur l'intervalle $[-\pi; 3\pi]$. 1pt

EXERCICE 3 : (4 points)

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base d'un espace vectoriel E . Soit f un endomorphisme de E .

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'ensemble E_λ des vecteurs \vec{u} de E tels que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.
 (a) Démontre que E_λ est un sous-espace vectoriel de E . 0,75pt
 (b) On suppose que f vérifie l'égalité $f \circ f = 2f$.
 Démontre que $\vec{u} \in \text{Im } f$ si et seulement si $\vec{u} \in E_2$. 0,75pt
2. On suppose ici qu'on a : $f(\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$; $f(\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} - 2\vec{j}$; $f(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \vec{0}$.
 (a) Démontre que $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$, $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$ et $f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$. 0,75pt
 (b) Donne la matrice M de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. 0,25pt
 (c) Démontre que $f \circ f = 2f$. 0,5pt
 (d) Détermine par une de ses bases, le noyau $\text{Ker } f$ de f , puis l'image $\text{Im } f$ de f . 1pt

EXERCICE 4 : (5,25 points)

I) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 2; 2)$, $B(3; -1; 6)$, $C(1; 1; 3)$, $E(5; 1; 4)$ et $F(-1; 1; 12)$.

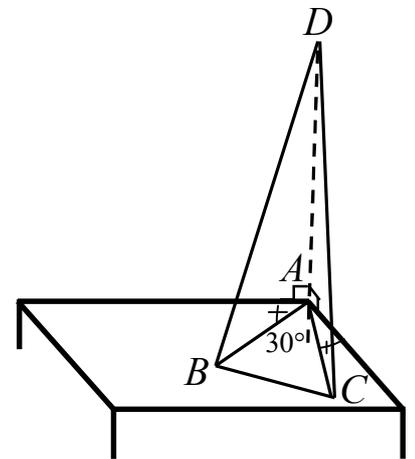
1. (a) Vérifie que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$. 0,5pt

- (b) Déduis-en que $x - 2y - 2z + 7 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) . **0,5pt**
2. Donne la nature et les éléments géométriques de l'ensemble \mathcal{S} des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$. (on notera Ω son centre). **0,5pt**
3. (a) Calcule la distance du point Ω au plan (ABC) . **0,5pt**
 (b) Etudie l'intersection du plan (ABC) et l'ensemble \mathcal{S} . **0,75pt**
- II) Soit g la fonction définie sur $I = [2; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x^2}{2x-2}$.
1. Etudie le sens de variation de g sur I . **0,5pt**
2. Soit la suite définie par : $U_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = g(U_n)$.
- (a) Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \geq 2$. **0,75pt**
 (b) Montre que la suite (U_n) est décroissante. **0,5pt**
 (c) Déduis-en que (U_n) est convergente et détermine sa limite. **0,75pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

SITUATION : Un architecte conçoit un monument à placer sur une surface rectangulaire et horizontale, surélevée par quatre piliers comme ci-contre : $AD = 3m, AB = 2m, AC = 2m$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$.

Ce monument doit être rempli de béton léger, avec des faces latérales à couvrir par des carreaux. A la veille de la réalisation de l'ouvrage, le maire voudrait qu'on prévoit au moment du coulage du monument, un trou permettant plus tard de fixer une tige en fer devant porter le drapeau de la république. Cette tige doit être verticale et s'appuyer sur le centre de la base ABC .



Tâches :

1. Quel volume approximatif de béton doit-on prévoir pour réaliser ce monument ? **1,5pt**
2. Pour quelle surface approximative doit-on prévoir des carreaux ? **1,5pt**
3. Où doit-on faire passer le trou de fixation de la tige sur la face BCD ? **1,5pt**

Présentation générale:

0,5pt