

MINESEC

DÉLÉGATION RÉGIONALE DE L'OUEST

LYCÉE DE BANDJOUN

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



ANNÉE SCOLAIRE : 2021 – 2022

CLASSE : TERMINALE D ET TI

DURÉE : 4 HEURES

COEFFICIENT : 4

EXAMINATEUR : NZOUEKEU MBITKEU PATRICE

CETTE ÉPREUVE ÉTALÉE SUR DEUX PAGES EST CONSTITUÉE DE DEUX PARTIES. LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION, LA PRÉSENTATION ET LA CLARTÉ DES RAISONNEMENTS ENTRERONT POUR UNE PART IMPORTANTE DANS L'APPRÉCIATION DES COPIES.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES :

[15,5 points]

Exercice 1. (2,75 points)

On considère la transformation f qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que :

$$\begin{cases} 2x' = x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ 2y' = x\sqrt{3} + y + 1 \end{cases}$$

1. Donner l'écriture complexe de f . [0,5 points]
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f . [0,75 points]
3. Déterminer l'équation de la droite (D') image de $(D) : y = x + 1$ par f . [0,75 points]
4. On considère dans $\mathbb{C}$ la suite des nombres z_n tel que :

$$\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z_n \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$ [0,75 point]

Exercice 2. (5,25 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$$

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $(z^2 - 4z + 3)(z - 2 - i\sqrt{3}) = 0$. [0,75 point]
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . [0,75 point]
3. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $3; 2 + i\sqrt{3}; 7$ et $11 + 4i\sqrt{3}$.
 - (a) Démontrer que le triangle IAB est équilatéral. [0,5 point]
 - (b) Soit r la rotation de centre le point F et d'angle $\frac{\pi}{3}$ d'écriture complexe :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} + \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Déterminer l'affixe du point F et montrer que $r(C) = D$. En déduire que le triangle DFC est équilatéral. [1,5 points]

(c) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h qui transforme I en D et B en C . [1 point]

(d) Déterminer l'expression complexe de la transformation $S = h \circ r$. [0,75 point]

Exercice 3. (7,5 points)

Soit la fonction

$$f : x \mapsto x + \sqrt{|x^2 - 1|}$$

et (C_f) sa courbe représentative.

1. Écrire f sans symbole de valeur absolue. [1 point]
2. Étudier la continuité de f en -1 et en 1 . [0,5 point]
3. Étudier la dérivabilité de f en -1 et en 1 puis conclure. [0,75 × 2 + 0,5) point]
4. Démontrer que (C_f) admet deux asymptotes que l'on précisera. [1 point]
5. Calculer la dérivée f' de f . [1 point]
6. Dresser le tableau de variation de f . [1 point]
7. Construire (C_f) dans un repère orthonormé. [1 point]

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES :

[4,5 points]

Situation :

M. NZOUEKEU a un jardin triangulaire dont les sommets sont repéré par les solutions de l'équation

$$z^3 + 6iz^2 + (-15 + 4i)z - 2(4 + 7i) = 0$$

admettant une solution imaginaire pure. Il souhaite le clôturer à l'aide d'un grillage dont le mètre coûte 1025 FCFA.

Mme NGOUABOU a une plantation dont la forme est celle de l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que

$$|z - 2 + 3i| = \frac{15}{2}$$

Elle souhaite clôturer en faisant deux rangés de fil barbelé dont le mètre coûte 350 FCFA sachant qu'elle dispose 34000 FCFA.

M. DJIONGO quant à lui possède un terrain situé en plein quartier administratif dont la forme est celle de l'ensemble des points M d'affixe $z \neq -1 + 2i$ tel que

$$\frac{z - 2 + 4i}{z + 1 - 2i}$$

soit imaginaire pure. Il souhaite l'hypothéquer avec une voiture dont la valeur est estimée à 1200000 FCFA. Sachant que son terrain a une valeur de 15000 FCFA le mètre carré,

Tâches :

1. Quelle somme dépensera M. NZOUEKEU pour clôturer son jardin ? [1,5 points]
2. L'argent de Mme NGOUABOU sera-t-il suffisant pour protéger cette plantation ? [1,5 points]
3. M. DJIONGO réussira-t-il à être propriétaire de ce véhicule ? [1,5 points]

Tout ce qui mérite d'être fait, mérite d'être bien fait.