Ministère des Enseignements Secondaires — **Test 2 : 2020-2021**
Lycée de MOFOLE — **Classe : TD.**
Département de mathématiques — **Durée : 4h, Coefficient : 4**

Épreuve de Mathématiques

L'épreuve est sur deux pages, deux grandes parties A et B , toutes obligatoires. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 14,5 PTS

Exercice 1 : 03,75 points

Le plan complexe **P** est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On définit l'application **f** de **P** dans **P** qui à tout point $M(x, y)$ d'affixe z associe le point $M'(x', y')$ d'affixe z' tel que :

$$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} \end{cases}$$. On donne $(\mathcal{C})$: $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$

1. Déterminer l'écriture complexe de **f**. **0,75 pt**
2. Soit **g** la transformation ayant pour écriture complexe : $z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3}(1 - i)$.
   (a) Déterminer la nature de **g** . **0,25 pt**
   (b) Déduire les éléments caractéristiques de **g**. **0,75 pt**
   (c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C})$. **0,5 pt**
   (d) déterminer une équation et la nature de l'ensemble des points $M(x, y)$ d'affixe z tels que : $| z - 2\sqrt{2} |=| z - 2 + 2\sqrt{2}i |$. **0,75 pt**
3. Déterminer une équation de l'image de $(\mathcal{C})$ par **f** . **0,75 pt**

Exercice 2 : 03 points

On considère la suite $(U_n)_n$ de nombres réels définie par : $U_0 = 1$, $U_1 = 3$ et la relation de récurrence : $\forall n \geq 1$; $U_{n+1} = \frac{4}{3}U_n - \frac{1}{3}U_{n-1}$. On pose $\forall n \geq 1$, $V_n = U_{n+1} - U_n$.

1. Calculer V_0 et V_1 . **0,5 pt**
2. Démontrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique . **0,75 pt**
3. Préciser les caractéristiques de $(V_n)_n$ (raison et premier terme). **0,25 pt**
4. On pose , $\forall n \geq 0$, $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_{n-1}$.
   (a) Exprimer S_n en fonction de n . **0,5 pt**
   (b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n . **0,75 pt**
   (c) Étudier la convergence éventuelle de la suite $(U_n)_n$. **0,25 pt**

Exercice 3 : 03,25 points

Soit le polynome P de variable complexe z défini par : $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5 = 0$.

1. Établir que pour tout nombre complexe z , $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$. **0,5 pt**
2. En déduire que *si* z_0 est une racine de P , alors $\overline{z_0}$. **0,25 pt**
3. Calculer $P(i)$ et conclure . **0,5 pt**
4. Déduire une autre racine de P . **0,25 pt**

5. (a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$. **0,75 pt**
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$. **0,5 pt**
6. résoudre alors l'équation $P(z) = 0$. **0,5 pt**

Exercice 4 : 04,5 points

$(U_n)_n$ est une suite de nombres réels définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Calculer U_1 et U_2 . **0,5 pt**
2. Montrer (en utilisant la récurrence) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 3$. **0,75 pt**
3. Montrer que $(U_n)_n$ est une suite croissante . **0,75 pt**
4. En déduire que $(U_n)_n$ converge . **0,5 pt**
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 - U_{n+1} \leq \dfrac{3 - U_n}{3}$. **0,75 pt**
6. Déduire que $0 \leq 3 - U_{n+1} \leq (\dfrac{1}{3})^n$. **0,75 pt**
7. En déduire la limite de la suite $(U_n)_n$. **0,5 pt**

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES :04,5 PTS

Mr Idrissou possède un terrain situé dans une **banlieue** , ayant la forme d'un cercle de rayon **r** , qu'il aimerait vendre . Il trouve un acheteur qui décide d'acheter le **mètre carré à 25000 Frs** . Le rayon **r** de ce terrain est tel que **ir** est l'unique solution de l'équation :
(E) : $z^3 - 30iz^2 - 300z - 1000i = 0$.
Après la vente de son terrain , **Mr Idrissou** utilise **2 .000 000 Frs** et décide **D'épargner le reste** d'argent issu de la vente . Son frère **Abdoul** travail dans une banque pratiquant un taux d'interet composé de $3,5\%_¸$ l'an . Pour ce faire il décide de placer ses **5 .500 000 Frs** dans deux banques . Il place **2 500000 Frs** dans la banque de son frère et le reste qui est de **3 000 000** dans une autre banque pratiquant un taux d'intérêt composé de $4,5\%_¸$.
Mr Idrissou observe dans la cour sa fille **Inna** et ses **5 amis** qui jouent aux jeux dit **de course rectangulaire** . **Inna** trace un rectangle au centre duquel elle trace un petit cercle . Elle divise le groupe en deux équipes de trois trois joueurs . **I , J et K** d'une part et **E , F et G** d'autre part . Au départ du jeu tous les **6** amies sont à l'intérieur du cercle . **Inna (I)** donne le sifflet à son père pour donner le coup d'envoi . L'objectif est de courir après le coup de sifflet et de se positionner sur les sommets du rectangle , la première équipe à atteindre les sommets a gagné . Le plan étant assimilé à un plan complexe , à la fin de la première manche **Inna** relève les abscisses de points de son équipe, ce qui donne : $z_I = 8 + 4i$, $z_J = -2 + 2i$ et $z_K = -1 - 3i$ puis elle s'exclame directement que son équipe a gagnée .

Taches :

Tache 1 : Combien a dépensé **Mr Idrissou** après la vente de son terrain . **1,5 pt**
Tache 2 : Aider **Mr Idrissou** à déterminer le nombre d'années de placement à partir duquel la somme d'argent acquise dans la banque de son frère dépassera celle acquise dans la seconde banque . **1,5 pt**
Tache 3 : Aider **Mr Idrissou** à comprendre pourquoi sa fille s'exclame . **1,5 pt**

Présentation : **1 pt**