

EVALUATION HARMONISEE N°2

Evaluation des ressources 15.5pts

Exercice 1 : 2.5 + 2 = 4.5pts

I. Questions à choix multiples. Attention notation dans $\mathbb{Z}$ toute mauvaise réponse enlève 0.25pt

- Soit z un nombre complexe tel que $|z| = \sqrt{2}$ et $\text{Arg} z = \frac{3\pi}{4}$ La forme algébrique de z est :
a. $1 + i$ b. $-1 + i$ c. $1 - i$ d. $-1 - i$
- Soit A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D . $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est égale à : a. $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right)$ b. $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ c. $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_A - z_B}\right)$ d. $\arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_A - z_B}\right)$
- Soit z un nombre complexe tel que $z \neq -3$. On pose $z' = \frac{z-3}{z+3}$ L'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit un imaginaire pur est :
a. un cercle b. une droite c. une droite privée d'un point d. un cercle privé d'un point
- Une racine carrée de $-8 + 6i$ est : a. $1 + 3i$ b. $1 - 3i$ c. $-1 + 3i$ d. $-1 - 3i$
- Soit $a = 1 + i\sqrt{3}$ $b = 2 - 2i$ et $c = \frac{a}{b}$ La forme exponentielle de c est :
a. $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ b. $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ c. $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ d. $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

II. On considère la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_n - 1)^2}$

- Démontrer que la suite (u_n) est minorée strictement par 1. 0.75pt
- Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. 0.75pt
- Déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. 0.5pt

Exercice 2 : 4.5pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, u, v). Soit s la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe son image M' d'affixe z' tel que $z' = (1 + i)z + 2 - i$

- Donner la nature et les éléments caractéristiques de s . 1pt
- On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$
a. Exprimer x' et y' en fonction de x et y . 1pt
b. Déterminer une équation cartésienne de la droite (L') image de la droite (L) d'équation cartésienne $y = -2x$ par s . 0.75pt
- Soit P et Q deux points d'affixes respectives $z_P = 2 + 2i$ et $z_Q = 4$ s' la similitude qui laisse invariant le point Q et qui transforme le point P en O.
a. Montrer qu'une écriture complexe de s' est $z' = (1 - i)z + 4i$ 1pt
b. Donner les éléments caractéristiques du cercle (C') image du cercle (C) de centre R d'affixe $z_R = 2 - 2i$ et de rayon $2\sqrt{2}$ 0.75pt

Exercice 3 : 3pts

Soit P le polynôme de la variable complexe z défini par $P(z) = z^3 - 5(1 + i)z^2 + 18iz + 10(1 - i)$

- Calculer $P(1 + i)$ et conclure 0.5pt
- Mettre $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z - 1 - i)(z^2 + az + b)$ où a et b sont à déterminer. 0.5pt
- a. Calculer $(1 + i)^2$ 0.25pt
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$ 0.5pt

4. Dans le plan complexe muni d'un repère, on considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = 3 + i \text{ et } z_C = 1 + 3i.$$

a. Donner la nature exacte du triangle ABC.

0.5pt

b. Démontrer que les points A, B et C appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

0.75pt

Exercice 4 : 3pts

On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n ,
 $z_{n+1} = (1 + i)z_n$ On pose pour tout entier naturel n , $U_n = |z_n|$

1. Calculer u_0 .

0.25pt

2. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

0.5pt

3. Exprimer u_n en fonction de n puis calculer $\lim u_n$ quand n tend vers $+\infty$.

0.75pt

4. a. Déterminer la forme algébrique de z_1 .

0.5pt

b. Déterminer la forme trigonométrique de z_1 .

0.5pt

c. Déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$

0.5pt

EVALUATION DES COMPETENCES

COMMANDO a travaillé pendant 30 ans comme agent de liaison dans une entreprise des biens et services. Il raconte avec beaucoup d'ironie que son premier salaire mensuel était insignifiant qu'il a fini par l'appeler A_0 . Dans les accords que **COMMANDO** a eus avec son patron, il devait obtenir une augmentation fixe sur son salaire chaque année. Dans ses souvenirs, **COMMANDO** sait que son salaire à la dixième année était de 53 000frs et que avant son départ en retraite, le comptable de la boîte lui a présenté le cumul de tous ses salaires pendant les 30 années, une somme totale de 23 040 000frs. Une fois la retraite actée, **COMMANDO** a reçu une prime de bonne séparation d'un montant de 1 500 000frs qu'il a immédiatement placé dans une banque à un taux d'intérêt annuel connu de tous les épargnants. Après deux années, **COMMANDO** sait qu'il a un capital de 1 749 600 dans cette banque. Pour régler les problèmes d'eau dans le village, **COMMANDO** fait creuser un puits par l'entremise d'une entreprise qualifiée. Pour atteindre la nappe phréatique qui est à 2 046m, cette entreprise creuse 2m le premier jour, 4m le deuxième jour, 8m le troisième jour, 16m le quatrième jour et ainsi de suite.

1. Quel est le taux d'intérêt utilisé dans cette banque par les épargnants ?

1.5pt

2. Déterminer le montant du premier salaire mensuel de **COMANDO**.

1.5pt

3. Combien de jours faut-il à cette entreprise pour atteindre la nappe phréatique ?

1.5pt