

	MINESEC - COLLÈGE BILINGUE NOTRE REINE DE LOURDES			
	Année scolaire 2019-2020			
	Département	Examen	Classe	Date
	MATHEMATIQUES	Devoir Harmonisé N° 2	T^{le}D	16/11/2019
	Durée	Coefficient	Visa de l'AP	Visa de PE
	4H	4		

EXERCICE 1 : 5points

- On donne les nombres complexes $p = 1 - i$, $q = 1 - i\sqrt{3}$ et $z = \frac{p^5}{q^4}$.
 - Calculer le module et un argument de p , q et z . **1,5pt**
 - Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z . **1pt**
 - En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$. **1pt**
- Linéariser $\sin^4 x$. **0,75pt**
- Exprimer $\cos 5x$ de $\cos x$ et $\sin x$ en utilisant la formule de Moivre. **0,75pt**

EXERCICE 2 : 5points

Soit (U_n) la suite définie par
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2}{U_n + 1} \end{cases}$$

- Calculer U_1 , U_2 , U_3 et U_4 . **0,5pt**
- Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_{2n}$.
 - Déterminer V_0 et V_1 . **0,25pt**
 - Montrer que pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = \frac{2(V_n + 1)}{V_n + 3} = 2 - \frac{4}{V_n + 3}$. **0,75pt**
 - Montrer par récurrence de pour tout entier naturel n , $0 \leq V_n \leq 1$. **0,5pt**
 - Vérifier que pour tout entier naturel n , $V_{n+2} - V_{n+1} = \frac{4(V_{n+1} - V_n)}{(V_{n+1} + 3)(V_n + 3)}$ et en déduire que la suite (V_n) est croissante. **1pt**
 - Que peut-on déduire des questions 2.c) et 2.d) ? Calculer la limite de la suite (V_n) . **0,5pt**
- Soit (W_n) la suite définie par $W_n = \frac{U_n + 2}{U_n - 1}$.
 - Montrer que la suite (W_n) est géométrique. Préciser sa raison. **0,5pt**
 - Exprimer W_n , puis U_n en fonction de n . **0,5pt**
 - Calculer la limite de la suite (U_n) . **0,5pt**

Problème 10pts

Partie A :

Soit (E) l'équation : $z^3 - (5 + 7i)z^2 - (4 - 25i)z - 12i + 30 = 0$ où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 **0,5pt**
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . **1pt**
3. Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $3; 2i$ et $2 + 5i$. S est la similitude directe de centre A qui transforme B en C .
 - a) Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 - i)z + 3i$, puis déterminer l'angle de S . **0,75pt**
 - b) Soit D l'image de C par S . Déterminer l'affixe du point D . **0,5pt**
 - c) Quelle est la nature du triangle ACD ? **0,75pt**
 - d) Déterminer l'image par S du cercle de centre C et de rayon 3cm . **0,5pt**
4. Soit f l'application qui, à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe $f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$
 - a) On pose $z = x + iy$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et y . **1pt**
 - b) En déduire la nature de l'ensemble des points d'affixe z , tels que $f(z)$ soit un réel. **0,5pt**

Partie B:

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 - 12z + 153 = 0$. **0,75pt**
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, d'unité graphique 1cm . On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :
 $z_A = \frac{3}{2} + 6i$; $z_B = \frac{3}{2} - 6i$; $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$ et $z_P = 3 + i$ et le vecteur $\vec{W}$ d'affixe $z_{\vec{W}} = -1 + \frac{5}{2}i$
 - a) Déterminer l'affixe z_Q du point Q image du point B par la translation t de vecteur $\vec{W}$. **0,75pt**
 - b) Déterminer l'affixe z_R du point R , image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$. **0,75pt**
 - c) Déterminer l'affixe z_S du point S , image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. **0,75pt**
3.
 - a) Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme. **0,5pt**
 - b) Calculer $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ et en déduire la nature précise du parallélogramme $PQRS$. **0,75pt**
 - c) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle dont on précisera l'affixe de son centre et son rayon. **0,75pt**