MINESEC
DRES OUEST
Lycée Bilingue de Santchou
Département de Mathématiques

Année scolaire : 2020-2021
Classe : T^{le}D ; Coef : 4
Séquence didactique 2
Durée : 3H

Épreuve de Mathématiques

Examinateur : **M.BOUNOU TEMATE**

I-EVALUATION DES RESSOURCES *(15,5 points)*

Exercice 1 *(3 points)*

On considère les nombres complexes z et u définis par :

$$z = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad u = \sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}.$$

1. Ecrire z^2 sous forme algébrique. ***0,5pt***
2. En déduire la forme trigonométrique de z^2. ***0,75pt***
3. Ecrire u sous forme trigonométrique, puis montrer que $z^2 = 4u^2$. ***0,75pt+0,25pt***
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$. ***0,75pt***

Exercice 2 *(3 points)*

1. On donne le nombre complexe $z = \dfrac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i}$.
   (a) Donner la forme algébrique de z. ***0,5pt***
   (b) Ecrire z sous forme trigonométrique. ***0,75pt***
   (c) Calculer et donner le résultat sous forme algébrique de $\overline{z}^6$. ***0,5pt***
2. Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
   (a) Déterminer l'écriure complexe de la rotation r de centre Ω d'affixe $z_\Omega = 2i$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$. ***0,75pt***
   (b) Déterminer l'image A' du point A d'affixe $z_A = 1-i$ par r. ***0,5pt***

Exercice 3 *(5 points)*

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. On considère l'équation (E) : $z^3 - 2z^2 + 2(2-3i)z - 20 = 0$.
   (a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure. ***0,5pt***
   (b) Déterminer les autres solutions de l'équation (E). ***1,5pt***
2. Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = 3+i$ et $z_C = -1-3i$.
   (a) Déterminer l'affixe du barycentre G des points $(A,-1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$. ***0,5pt***

(b) Déterminer l'ensembe des points M du plan tel que $-MA^2+MB^2+MC^2=12$.***0,75pt***

3. Soit $\mathcal{S}$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que $Z'=(1+i\sqrt{3})Z+3\sqrt{3}-i\sqrt{3}$.

   (a) Donner la nature de $\mathcal{S}$ ainsi que ses éléments caractéristiques. ***1pt***

   (b) Déterminer l'image par $\mathcal{S}$ du cercle $(\mathcal{C})$ d'équation cartésienne $(\mathcal{C}):(x-2)^2+(y+4)^2=16$. ***0,75pt***

Exercice 4 ***(4,5 points)***

Soit la suite numérique (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n-1}{2u_n+5}, \forall n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n\geq -\dfrac{1}{2}$. ***0,75pt***

   (b) Etudier les variations de la suite (u_n). ***0,75pt***

   (c) Déduire des questions précédentes que (u_n) converge puis calculer sa limite. ***0,75pt***

2. On désigne par (v_n) la suite définie par $v_n=\dfrac{2u_n+1}{u_n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$.

   (a) Démontrer que (v_n) est géométrique puis préciser la raison et le premier terme.***0,75pt***

   (b) Exprimer (v_n) puis (u_n) en fonction de n. ***1pt***

   (c) Etudier la convergence de la suite (u_n). ***0,5pt***

II- EVALUATION DES COMPETENCES **:*(4.5 points)***

L'impédance acoustique (aussi appelée impédance acoustique spécifique, car est une grandeur intensive) Z_{ac} d'un milieu pour une onde acoustique caractérise la résistance du milieu au passage de cette onde. Bien que l'impédance acoustique du milieu soit une grandeur réelle pour les ondes acoustiques planes progressives, cela n'est plus vrai pour les ondes acoustiques planes stationnaires ou les ondes acoustiques divergentes. Dans le cas général, Z_{ac} est complexe : $Z_{ac}=R_{ac}+iX_{ac}$, avec R_{ac} la résistance acoustique et X_{ac} la réactance acoustique du milieu pour l'onde considérée. La masse volumique et la vitesse du son variant avec la température, c'est aussi le cas pour l'impédance acoustique caractéristique.

Un ingénieur lors d'une étude dans un milieu précis déclara que en fonction de la température t (en degrés), la résistance acoustique $R_{ac}=3\sqrt{2}\sin(7\pi t-21\pi)$ et la réactance acoustique $X_{ac}=3\sqrt{2}\cos(7\pi t+\theta)$ où θ est un argument du nombre complexe $Z=\dfrac{Z_1}{Z_2}$ avec $Z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2=1-i$. Il constate par ailleurs que l'impédance acoustique est imaginaire pure pour les ondes acoustiques divergentes.

1. Aider le technicien à déterminer la valeur de θ. ***1,5pt***

2. Déterminer une valeur de la température du milieu lorsque les ondes acoustiques sont divergentes. ***1,5pt***

3. Quelle est la plus grande valeur de l'impédance acoustique pour les ondes acoustiques planes progressives dans ce milieu. ***1,5pt***