

Examineurs : TEDJOU BIENVENU (PLEG)

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

NB : la clarté, la lisibilité et toutes les étapes de calculs seront prises en compte. L'épreuve est numérotée sur deux pages

A. EVALUATIONS DES RESSOURCES : [15pts]

EXERCICE 1 : [6, 5pts]

- 1- Résoudre dans  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  le système :  $\begin{cases} iz + \bar{z}' = -2\sqrt{3} \\ \bar{z} - iz' = -2 \end{cases}$  [1pts]
- 2- On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^3 + (9i)z^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = 0$ 
  - a- Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera. [0, 5pts]
  - b- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) [1, 5pts]
- 3- On donne dans le plan les points A, B et C d'affixes :  $z_A = -2 + 2i$ ;  $z_B = 2$ ;  $z_C = -1 + 6i$ 
  - a- Calculer  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  et en déduire la nature du triangle ABC [0, 5pts]
  - b- Le point D est l'image du point B par la translation de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $2 + 4i$ . Calculer l'affixe  $z_D$  du point D [0, 5pts]
- 4- Soit s la transformation de centre D qui transforme B en A
  - a- Déterminer l'écriture complexe de s [0, 75pts]
  - b- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s [0, 75pts]
  - c- Soit  $M(x; y)$  un point du plan et  $M'(x'; y')$  son image par s
    - i- Donner l'expression analytique de s [0, 5pts]
    - ii- Déterminer l'image par s de la droite (D) d'équation  $x - 2y + 1 = 0$  [0, 5pts]

EXERCICE 2 : [2pts]

On considère la suite des nombres complexes  $(z_n)$  définie par :  $\begin{cases} z_0 = \sqrt{3} - i \\ z_{n+1} = (1 + i)z_n \end{cases}$ . On pose pour tout entier naturel n,  $U_n = |z_n|$

- 1- Calculer  $U_0$  [0, 25pt]
- 2- Démontrer que  $U_n$  est une suite géométrique donc on précisera le premier terme et la raison [0, 5pt]
- 3- Déterminer la forme algébrique et la forme trigonométrique de  $z_1$  [0, 75pt]
- 4- Déduire la valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{12}$  [0, 5pt]

PROBLEME : [7pts]

Les parties A et B sont liés et sont obligatoire

Partie A : [1, 5pts]

Soit la fonction g définie sur R par :  $g(x) = x^3 - 3x - 3$

- 1- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. [0, 5pts]
- 2- Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  tel que :  $2,10 < \alpha < 2,11$ . [0, 5pts]

3- Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

[0, 5pts]

**PARTIE B** : [5, 5pts]

On définit sur  $\mathbb{R} - \{1; -1\}$  la fonction  $f$  par  $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$

1- Démontrer que  $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$  et étudier le signe de  $f'(x)$

[1pts]

2- Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$

[0, 75pts]

3- Montrer que  $\alpha^3 = 3\alpha + 3$  et en déduire  $f(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$  et en déduire un encadrement de  $f(\alpha)$

[1pts]

4- Montrer que la droite d'équation  $(D): y = 2x$  est asymptote à  $(C_f)$  la courbe de  $f$ , puis étudier la position relative de  $(C_f)$  par rapport à  $(D)$  préciser éventuellement les autres asymptote à  $(C_f)$

[1pts]

5- Construire la courbe  $(C_f)$  de  $f$  dans un repère orthonormal

[1pts]

6- Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ .

Montrer que l'équation  $h(x) = 2$  admet trois solutions sur  $\mathbb{R}$  (on précisera les intervalles qui contiennent ces solutions)

[1, 25pts]

**B. EVALUATIONS DES RESSOURCES** : [4, 5pts]

Francis a travaillé pendant 30 ans comme agent de liaison dans une entreprise des biens et services. Il raconte avec beaucoup d'ironie que son salaire mensuel était insignifiant qu'il a décidé de l'améliorer en l'appelant  $C_0$ . Dans les accords que François a eus avec son patron, il devait obtenir une augmentation fixe sur son salaire chaque année. Dans ses souvenirs, François sait que son salaire à la dixième année était de 53 000frs et qu'avant son départ en retrait, le comptable de la boîte lui a présenté le cumul de tout son salaire pendant les 30 années, une somme total de 23 040 000frs. Une fois le retrait acté, François a reçu une prime de bonne séparation d'un de 1 500 000frs qu'il a immédiatement placé dans une banque à un taux d'intérêt annuel connu de tous les épargnants. Après deux années, François sais qu'il a un capital de 1 749 600frs dans cette banque. Pour régler les problèmes d'eau dans le village, François fait creuser un puits par l'entreprise qualifiée. Pour atteindre la nappe phréatique qui est à 2046m, cette entreprise creuse 2m le premier jour, 4m le deuxième, 8m le troisième jour, 16m le quatrième jour et ainsi de suite.

**TACHES**

1- Quel est le taux d'intérêt utilisé dans cette banque par les épargnants ?

[1, 5pts]

2- Déterminer le montant du premier salaire mensuel de François

[1, 5pts]

3- Combien de jours faut-il à cette entreprise pour attendre la nappe phréatique ?

[1, 5pts]