



La qualité de la rédaction et la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation de la copie de l'élève.

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES / 15,5 POINTS

Exercice 1 : /3,75pts

On considère l'équation (E) : $x^2 - 5y^2 = 1$ où les inconnues x et y sont des entiers strictement positifs.

1. Dans cette question, on suppose que $(x_0; y_0)$ est solution de (E).

- a. Démontrer que x_0 et y_0 sont premiers entre eux. 0,25pt
- b. Prouver que x_0 et y_0 n'ont pas la même parité. 0,25pt
- c. Démontrer qu'il existe un entier k tel que $x_0 = 5k + 1$ ou $x_0 = 5k - 1$. 0,25pt
2. a. Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ tels que $(9 + 4\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$ 0,5pt
- b. Donner a_1 et b_1 puis exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n . 1pt
- c. Montrer à l'aide d'une récurrence que les couples $(a_n; b_n)$ sont solutions de (E). 0,5pt
- d. En calculant $\frac{1}{9+4\sqrt{5}}$ et $\frac{1}{a_n+b_n\sqrt{5}}$, montrer que $(9 - 4\sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5}$. 0,5pt
- e. En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n . 0,5pt

Exercice 2 : /2,5pts

I. Soit (Z_n) la suite définie dans $\mathbb{C}$ par $Z_0 = 1 + i$ et pour tout entier naturel n , $Z_{n+1} = -\frac{1}{2}Z_n$

- 1) Démontrer que la suite (V_n) définie par $V_n = |Z_n|$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. 0,5pt
- 2) On pose $W_n = \arg Z_n$, montrer que la suite (W_n) est arithmétique. 0,25pt
- 2) Exprimer $\arg(Z_n)$ en fonction de n , puis Z_n en fonction de Z_0 et n . 0,5pt

II. On considère l'application j qui à tout complexe z associe $j(z) = \frac{1+i}{3\sqrt{2}} z$

On pose $z_0 = 1$, $z_1 = j(z_0)$, $z_2 = j(z_1)$,, $z_{n+1} = j(z_n)$.

- 1) Ecrire $\alpha = \frac{1+i}{3\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique. 0,25pt

- 2) Montrer par récurrence que $z_n = \left(\frac{1+i}{3\sqrt{2}}\right)^n$. 0,5pt
- 3) En déduire l'écriture trigonométrique de z_n . 0,25pt
- 4) Pour quelle valeur de n , z_n est-il réel ? 0,25pt

Exercice 3 : /1pt

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application F qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = u^2 z + u - 1$ où u désigne un nombre complexe.

1. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ (en radians) ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées. 0,5pt
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une homothétie de rapport -2 ; Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées. 0,5pt

Problème : /8,25pts

Partie A : /2,25pts

- a) Vérifier si la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{x+7}-3}$ admet un prolongement par continuité en 2 si oui définir très clairement ce prolongement 0,75pt
- Calculer les limites suivantes : b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 3} + 2x)$ 1,5pt
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2 \sin x)$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + \sin x}{x} \right)$

Partie B : /6pts

- I/ Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$ et $g(x) = x^3 - 3x - 3$
- 1) Etudier les variations de g . 0,5pt
- 2) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α . 0,5pt
- 3) Déterminer un encadrement de α avec une amplitude de 10^{-2} et Montrer que $f(\alpha) = \frac{6\alpha+9}{\alpha^2-1}$ 1pt
- 4) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$. 0,25pt
- 5) Etudier les branches infinies de f 0,5pt
- II/ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$. On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal, unité 2 cm sur les axes
- 1) Montrer que (C) admet deux asymptotes horizontales. 0,5pt
- 2) Déterminer la dérivée de h et dresser le tableau de variation de h 0,5pt

Proposée par Jean Bonheur Tchouafa, PLEG/MATHS au Lycée Bilingue de Dschang ©Novembre 2022

- 3) Justifier que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle K que l'on précisera 0,5pt
- 4) Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une solution unique β et que $\beta \in [-1; 0]$ 0,75pt
- 5) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |h(x) + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}|x|$, déduire $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ 0,5pt
- 6) Tracer les courbes (C) et (C^{-1}) de h et h^{-1} dans le même repère. 0,5pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES / 4.5 POINTS

Monsieur Moussa est un enseignant de Mathématique qui appartient à une famille très riche du Nord Cameroun. Sa famille possède des parcelles de terre. Ali, le fils de Moussa, élève en Tc est très curieux de connaître le nombre de parcelles de terres que possède sa famille. Mais Monsieur Moussa qui veut vérifier si son fils connaît utiliser le raisonnement mathématiques lui répond par de manière énigmatique en ces termes : le nombre de parcelles est le plus petit nombre entier naturel tel que $\overline{x32y}$ écrit dans le système de numération de base 5 soit divisible par 3 et 4.

En 2012, la famille de Monsieur Moussa avait récolté le cacao sur une de ses parcelles et avait entreposé la récolte dans une réserve ayant la forme d'un cube ABCDEFG de côté 1 *dam*, muni d'un repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et avait constaté que le cacao occupait un volume ayant la forme d'un tétraèdre ABIG où I est le milieu du segment $[EF]$. Le prix d'un sac de cacao de 100 L coûtait 120 00 FCFA à cette époque.

Pour le suivi des recettes de leur ferme, la famille de Monsieur Moussa a fait appel à l'expertise d'un bureau d'études. Des études faites ont permis d'établir que la recette $R(x)$ (en millions de francs de CFA), résultant de la vente de x centaines de kilogrammes de cacao, est définie sur $[1; 5]$ par $R(x) = 17x$. Monsieur POUGA vend son cacao à son client principal, au coût $C(x) = x(-x^2 + 29) - 16$ (en millions). Le bénéfice de son client principal pour x centaines de kilogrammes de cacao vendus est $B(x) = R(x) - C(x)$ défini sur $[1; 5]$. Le fournisseur requiert votre expertise pour savoir s'il existe au moins un x_0 dans $[1; 5]$ tel que le bénéfice soit égale à 81 millions de francs CFA.

Votre travail consiste à résoudre les tâches suivantes en justifiant votre démarche par des calculs bien détaillés :

- | | |
|--|-------|
| Tâche 1 : Combien de parcelles de terrain possède la famille de Monsieur Moussa ? | 1,5pt |
| Tâche 2 : Déterminer, à l'unité près, une estimation de sa production en 2021. | 1,5pt |
| Tâche 3 : Déterminer le prix de vente de la production de cacao en 2012. | 1,5pt |