TRAVAUX DIRIGÉS SUR L'ESPACE VECTORIEL

EXERCICE 1. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de E. $\boldsymbol{f}$ est l'endomorphisme de E défini par : $\boldsymbol{f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}}$; $\boldsymbol{f(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath} - \vec{k}}$; $\boldsymbol{f(\vec{k}) = \vec{\imath} + \vec{k}}$.

1. ($f(\vec{\imath}),\ f(\vec{\jmath}),\ f(\vec{k})$) est-il une base de E ? $\boldsymbol{f}$ est-elle un automorphisme de E
2. Soit $\vec{u}(x, y, z)$ un vecteur de E.
   a) Déterminer les composantes (x',y',z') de $f(\vec{u})$
   b) Démontrer que Ker$f$ est une droite vectorielle dont on donnera une base
   b) Démontrer que $\boldsymbol{f(\vec{u}) = (x+z)f(\vec{\imath}) + (y-z)f(\vec{\jmath})}$**.** En déduire que Im$f$ est un plan vectoriel dont une base est $\left(f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath})\right)$.

EXERCICE 2. E désigne un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\boldsymbol{f(\vec{k}) = f(\vec{\jmath}) = \frac{1}{2}(\vec{\jmath} + \vec{k})}$ $\quad \boldsymbol{et} \quad \boldsymbol{f(\vec{\imath}) = \vec{\imath}}$ **.**

1. Déterminer Ker$f$. Déterminer Imf et donner une base.
2. Montrer que tout vecteur de E s'écrit comme somme d'un vecteur de **Ker$\boldsymbol{f}$** et de **Im$\boldsymbol{f}$.**

3, a) Démontrer que $\boldsymbol{f \circ f = f}$
   b) Démontrer que $\boldsymbol{\vec{u} \in Imf \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}}$
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $\boldsymbol{f}$**.**

EXERCICE 3. Soit $\boldsymbol{f}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$de matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est $\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}}$

1. a) Déterminer l'ensemble (E) des vecteurs invariants par $\boldsymbol{f}$**.**
   b) Montrer que (E) est un sous espace vectoriels de E engendre par les vecteurs de type $\vec{u}(1,1,1)$
   c) Déterminer $\boldsymbol{f \circ f(\vec{\imath})}$, $\boldsymbol{f \circ f\ (\vec{\jmath})}$ **et** $\boldsymbol{f \circ f(\vec{k})}$**.** Puis écrire la matrice de $\boldsymbol{f \circ f}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Soit (F) l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $\boldsymbol{(f \circ f)(\vec{v}) = -\vec{v}}$.
   a) Démontrer que (F) est un sous espace engendre par les vecteurs de la forme du type : $\boldsymbol{\vec{v}(1, 0, a)}$ **et** $\boldsymbol{\vec{w}(0, 1, b)}$
   b) Montrer que $(\boldsymbol{\vec{u}}, \boldsymbol{\vec{v}}, \boldsymbol{\vec{w}})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ et trouver la matrice de $\boldsymbol{f \circ f}$ dans cette base

EXERCICE 4. E est un plan vectoriel et $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E. **Id** désigne l'identité et **θ** l'endomorphisme nul de E.

1. Soit $\boldsymbol{f}$ un endomorphisme de E vérifiant la propriété suivante **(p) : Pour tout vecteur $\boldsymbol{\vec{u}}$, de E, $(\boldsymbol{\vec{u}}, \boldsymbol{f(\vec{u})})$ est lié.**
   a) Montrer qu'il existe deux réels *a* et *b* tels que $\boldsymbol{f(\vec{e}_1) = a\vec{e}_1}$ **et** $\boldsymbol{f(\vec{e}_2) = b\vec{e}_2}$.
   b) Calculer $\boldsymbol{f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)}$ et en déduire que ***a*=*b*.** Quelle est la nature de $\boldsymbol{f}$?

2) On suppose que f est un endomorphisme de E ne vérifiant pas la propriété **(p)** ci-dessus. Soit $\vec{u}$ un vecteur de E tel que $(\boldsymbol{\vec{u}}, \boldsymbol{f(\vec{u})})$ soit un système libre.
   a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\boldsymbol{(f \circ f)(\vec{u}) = \alpha\vec{u} + \beta f(\vec{u})}$
   b) Ecrire la matrice de $\boldsymbol{f}$ dans la base $(\boldsymbol{\vec{u}}, \boldsymbol{f(\vec{u})})$ et en déduire que l'on a : $\boldsymbol{f \circ f - \beta f - \alpha Id = \theta}$.
   c) En supposant que la matrice de f dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est $\begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{4} \end{pmatrix}$. Déterminer α et β.

3) Dans cette partie, on suppose que $\boldsymbol{f}$ est endomorp1hisme de E tel qu'il existe des réels *a* et *b* distincts vérifiant : $\boldsymbol{(f - aId) \circ (f - bId) = \theta}$. Soit $\boldsymbol{p = \frac{1}{b-a}(f - \alpha Id)}$ $\boldsymbol{et\ q = \frac{1}{a-b}(f - bId)}$.

a) Déterminer $\boldsymbol{f \circ f}$ à l'aide de $\boldsymbol{f}$ et de Id.
b) Montrer que p et q sont des projecteurs et déterminer ***p+q*** .
c) Exprimer ***f*** comme combinaison linéaire de p et de q.

EXERCICE 5. E est un plan vectoriel et $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base de E. f l'endomorphisme de E vérifiant la propriété ***Kerf=Imf.***

1. Quelles peuvent sont les dimensions de *Kerf* et de *Imf ?*
2. On nomme $\vec{u}$ un vecteur non nul de Ker*f*. Démontrer qu'il existe toujours un vecteur $\vec{v}$ de E non nul tel que l'on ait $f(\vec{v})=\vec{u}$.
3. Démontrer que le système $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E puis donner la matrice de *f* dans cette base.
4. Démontrer que $f \circ f$ est l'endomorphisme nul de E.

EXERCICE 6.

A. Dans le plan vectoriel $\vec{P}$ associe à P, on considère l'application φ telle que
$\boldsymbol{\varphi(\vec{0})=\vec{0}}$ **et** $\boldsymbol{\varphi(\vec{u}) = \frac{4}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} \quad si \quad \vec{u} \neq \vec{0}}$.

1. Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul. Exprimer $\boldsymbol{\varphi\left(\frac{4}{\|\vec{u}\|^2}\vec{v}\right)}$ en fonction de $\vec{v}$ et en déduire que φ n'est pas une application linéaire.
2. Déterminer l'ensemble In(φ) des vecteurs de $\vec{P}$ telles que $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$.
3. Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ deux vecteurs de E telles que $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 2 \ et \ Mes\left(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}\right) = \frac{\pi}{3}. \ Calculer \ \|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\|$
et en déduire que In(φ) n'est pas un sous espace vectoriel de $\vec{P}$.
4. Soit Opp(φ) l'ensembles des vecteurs $\vec{u}$ de $\vec{P}$ tels que $\varphi(\vec{u}) = -\vec{u}$. Déterminer Opp(φ) et montrer que Opp(φ) est un sous espace vectoriel $\vec{P}$.

B. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de E. Soient $\vec{a} \ et \ \vec{n}$ les vecteurs définis par : $\vec{a} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k} \ et \ \vec{n} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$. f est l'application de E vers E définie par : $\boldsymbol{f(\vec{u}) = (\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{n}.}$

1. Démontrer que *f* est un endomorphisme de E puis trouver la matrice de *f* dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. Démontrer que *f* est une projection vectorielle
3. Démontrer que Ker*f* est une droite vectorielle dont on donnera une base $\vec{e}_1$.
4. Démontrer que Im*f* est un plan vectoriel de vecteur normal $\vec{n}$.

EXERCICE 7. E est un plan vectoriel et $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base de E. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de E. On nomme Q l'ensemble des endomorphismes f vérifiant $\boldsymbol{f \circ f = -Id_E}$.

1. Montrer que tout élément *f* de Q est bijectif puis déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.
2. Soit *f* un élément de Q.
   i) Montrer que pour tout réel β, $\boldsymbol{f(\vec{u}) = \beta\vec{u} \quad si \ \vec{u} = \vec{0}.}$
   ii) En déduire que pour tout élément non nul $\vec{u}$ de E, $(\boldsymbol{\vec{u}, f(\vec{u})})$ **est** une base de E.
   iii) Ecrire la matrice de *f* dans cette base.