PROF : NZOUEKEU PATRICE
INGÉNIEUR - PLEG

TD $N°$ 3
T^{le} C

GROUPE CAUCHY SCHWARTZ

Exercice 1

On pose

$$P(z) = z^3 - (4+9i)z^2 + (-19+24i)z + 36 + 3i$$

où z est un nombre complexe.

1. Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une racine imaginaire pure.
2. Résoudre l'équation $P(z) = 0$.
3. Quelle est la nature du triangle dont les sommets sont les points images des solutions de l'équation $P(z) = 0$?

Exercice 2

On pose

$$h(x) = \frac{1}{3 + \sin x}$$

et

$$g(x) = h(x) - x$$

1. Étudier les variations de h sur $[-\pi; \pi]$.
2. Soit u la restriction de h à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
   (a) Montrer que u est une bijection de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   (b) Déterminer l'intervalle J' sur lequel la bijection u^{-1} de u est dérivable.
   (c) Calculer $(u^{-1})'(x)$ pour tout x élément de J'.
3. (a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une solution unique x_0 dans $\mathbb{R}$ appartenant à $]0; 1[$.
   (c) Justifier que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ on a $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et que $|h(x) - x_0| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|$

Exercice 3

PARTIE A :

1. Trouver trois réels a , b et c tels que $(\forall x \in]0; +\infty[)$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

2. En déduire une primitive de la fonction u définie sur $]0; +\infty[$ par

$$u(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

PARTIE B : On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2} = 0 \tag{1}$$

1 Vérifier que la fonction y_0 définie sur $]0;+\infty[$ par

$$y_0(x) = x$$

est solution de (1).

2 On pose pour tout $x \in]0;+\infty[$

$$y(x) = x.z(x)$$

(a) Vérifier que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que y est solution de (1) si et seulement si z vérifie l'équation différentielle

$$x(1+x^2)z'' + 2z' = 0$$

(c) En déduire que pour tout $x \in]0;+\infty[$

$$z(x) = -\frac{\alpha}{x} + \alpha x + \beta \ \ avec \ \ (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$$

(d) Donner toutes les solutions de (1) sur $\mathbb{R}_+^*$

Problème 1

On pose

$$f(x) = \frac{|x^2-3x+2|+1}{|1-x|+1}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 Préciser l'ensemble de définition de f et écrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

2 Étudier la dérivabilité de f en 1 et en 2

3 Écrire une équation de chacune des tangentes ou demi-tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ en ses points d'abscisses respectives 1 et 2.

4 Étudier sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;2[$ la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1. Donner une interprétation géométrique du résultat.

5 Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

6 Étudier les variations de f.

7 Soit v la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty;2[$. Justifier que v admet une bijection réciproque v^{-1} dont on donnera le sens de variation.

«SI L'ESPRIT D'UN HOMME S'ÉGARE, FAITES-LUI ÉTUDIER LES MATHÉMATIQUES, CAR DANS LES DÉMONSTRATIONS, POUR PEU QU'IL S'ÉCARTE, IL SERA OBLIGÉ DE RECOMMENCER.»
FRANÇIS BACON