

Mini Travaux Dirigés

♦ **Proposé par: MANI Boris.I**

♦ **Niveau : T^{le}C**

♦ **Année scolaire : 2022-2023**

Suites Numériques

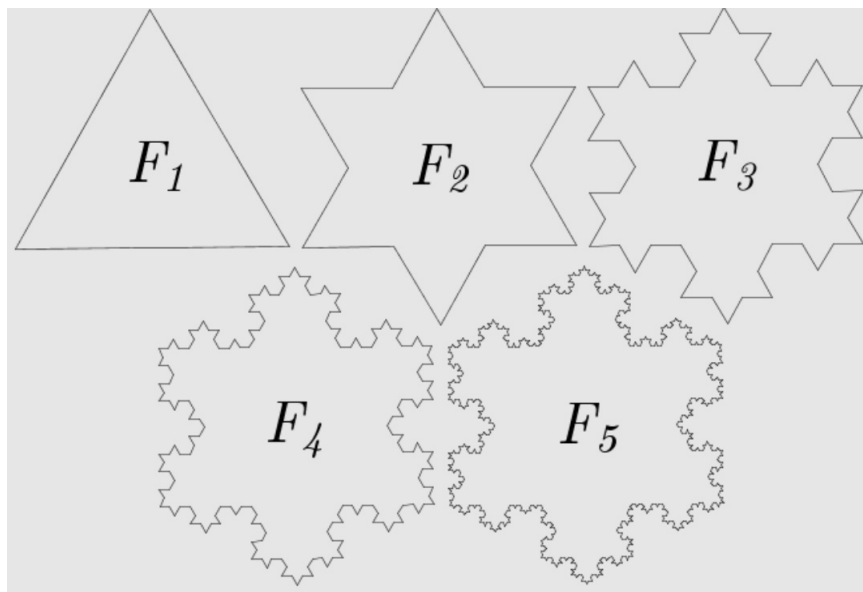
Exercice N° 1

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, soit f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x$.

- 1 Ecrire $f_n(x)$ à l'aide du symbole $\sum$. Quel est le sens de variation de f_n sur $[0, 1]$?
- 2 Dresser le tableau de variation de f_n sur $[0, 1]$ et déduire que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution que l'on notera a_n .
- 3 Montrer que pour tout $n \geq 1$, $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}$ et déduire que l'on a pour tout $n \geq 1$, $a_n > \frac{1}{2}$.
- 4 Exprimer f_{n+1} en fonction de f_n et montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $f_{n+1}(a_n) = a_n^{n+1} + 1$.
- 5 Déduire de la question précédente que $a_{n+1} \leq a_n$ puis justifier que la suite (a_n) converge vers un réel L vérifiant $\frac{1}{2} \leq L < 1$.
- 6 Pour tout $n \geq 1$, comparer L et a_n puis déduire que $1 - \frac{1}{2^n} \leq f_n(L) \leq 1$. Quelle est la limite de la suite $(f_n(L))$?
- 7 Montrer que $f_n(L) = L \frac{1 - L^n}{1 - L}$ puis que $\frac{L}{1 - L} = 1$.
- 8 Déduire la valeur de L .

Exercice N°2

Le mathématicien Suédois Von Koch (1870 – 1924) a proposé la construction d'un objet simple dit "fractale" ou flocon d'ordre n noté F_n .



La construction repose sur un principe simple: le départ est un triangle équilatéral de côté 1. Ensuite pour chacun de ses côtés, on divise le segment en trois parties égales et on construit un triangle équilatéral sur le "côté central" pour obtenir le flocon d'ordre 2 et ainsi de suite.

On note pour tout $n \geq 1$: $\mathcal{L}_n$ la longueur d'un côté du flocon d'ordre n ; $\mathcal{C}_n$ son nombre de côtés; $\mathcal{P}_n$ son périmètre et $\mathcal{A}_n$ son aire.

- 1 Calculer les valeurs de $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{A}_1$.
- 2 Déterminer les relations de récurrence entre $\mathcal{L}_n$ et $\mathcal{L}_{n+1}$ d'une part, et entre $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ d'autre part.
- 3 Exprimer $\mathcal{P}_n$ en fonction de $\mathcal{L}_n$ et $\mathcal{C}_n$.
- 4 Sachant que l'aire d'un triangle équilatéral de côté a vaut $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, trouver une relation de récurrence permettant de calculer $\mathcal{A}_{n+1}$ en fonction de $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{L}_n$ et $\mathcal{C}_n$.
- 5 Calculer alors l'aire du flocon d'ordre 3.

Exercice N°3

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = 2 + \frac{n^2}{U_n} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

- 1 Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $n < U_n < n+1$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{n}$.
- 2 Montrer que la suite U est strictement croissante. Est-elle majorée? justifier.
- 3 On définit la suite W par $W_n = \frac{1}{U_n - n} - 1$.
 - a Montrer que $W_{n+1} = \frac{1}{W_n + \frac{1}{n}}$.
 - b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 - \frac{1}{n} \leq W_n \leq 1$.
 - c Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$ puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - n)$.
- 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n kW_k$.
 - a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k(W_k - 1)$.
 - b En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| S_n - \frac{n+1}{2n} \right| \leq \frac{1}{n}$.
 - c Montrer que la suite (S_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice N° 4

Dans l'étude de la dynamique des population, le modèle **logistique** est l'un des plus utilisé pour modéliser certaines évolution de population même dans le cas un comportement chaotique survient (épuisement des ressources etc). Il repose sur l'hypothèse que pour une population N_t avec $t \in \mathbb{N}$ se trouvant dans un milieu donné, le taux d'accroissement $\frac{N_{t+1} - N_t}{N_t}$ est une fonction affine décroissante de N_t .

- 1 Justifier que l'on peut écrire pour tout $t \geq 0$, $\frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} = r(k - N_t)$, avec $k > 0$ et $r > 0$.
- 2 On suppose que (N_t) converge vers une limite L .
 - a Exprimer N_{t+1} en fonction de N_t .
 - b En déduire que $L = 0$ ou $L = k$ (k est appelé la **capacité d'accueil du milieu**).
 - c Donner une interprétation réaliste de ce résultat.
- 3 On pose pour $t \in \mathbb{N}$, $P_t = \frac{N_t}{k}$.
 - a Montrer que pour tout $t \geq 0$, $P_{t+1} = P_t + a \times P_t(1 - P_t)$, où a est une constante à déterminer.
- 4 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + ax(1 - x)$ et on choisit $P_0 = 0,5 = a$.
 - a Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé unité 10cm ainsi que la droite (Δ) d'équation $y = x$.
 - b Représenter les sept premiers termes de la suite (P_t) sur l'axe des abscisses.
 - c Conjecturer le comportement de la suite (P_t) à l'infini.