.

Fiche de Travaux dirigés
Nombres complexes

Tous ces exercices sont extraits des baccalauréats.

Njionou Patrick, S
pnjionou@yahoo.fr
Lycée de Japoma
BP : 7297, Douala, Cameroun
et
Tchapnga Romaric
romaric1984@yahoo.fr
Lycée de Nkolnda-Nsimalen

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$.

On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure, les points introduits dans le texte (unité graphique : 2 cm.)

1. (a) Résoudre l'équation

$$(\mathrm{E}) \quad : \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

   (b) On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 ; placer M et N sur la figure.

   (c) Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w} = -2\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure.
   Montrer que MNPQ est un carré.

2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
   Placer ces points sur la figure.
   Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment [MN].

3. On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.

   (a) Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.

   (b) Exprimer les affixes Z de $\vec{\mathrm{PR}}$ et Z' de $\vec{\mathrm{PS}}$ en fonction de α.

   (c) Montrer que $|Z| = |Z'|$ et que $\dfrac{Z}{Z'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   (d) Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS.

Exercice 2

1. On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16.$$

   (a) Calculer P(4).
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\mathrm{P}(z) = 0$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ cm.
   Soient A,B, C les points d'affixes respectives :

$$a = 4 \qquad b = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad c = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$$

   (a) Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
   (b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$
   On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\vec{\mathrm{OB}}$.
   (a) Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?
   (b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.
   (a) Montrer que le quadrilatère COFH est un carré.
   (b) Calculer l'affixe du point H.
   (c) Le triangle AGH est-il équilatéral ?

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A et B les point, d'affixes respectives 2 et 3. On fera un dessin (unité graphique 2 cm) qui sera complété selon indications de l'énoncé.
La question 1 *est indépendante des questions* 2 *et* 3.

1. (a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation
   $z^2 - 4z + 6 = 0$.
   (b) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = 2 + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = -2 - \mathrm{i}\sqrt{2}$.
   Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{z_1 - 3}{z_1}$.
   En déduire que le triangle OBM_1 est un triangle rectangle.
   (c) Démontrer sans nouveau calcul que les points O, B, M_1 et M_2, appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ que l'on précisera.
   Tracer le cercle $\mathcal{C}$ et placer les points M_1 et M_2 sur le dessin.

2. On appelle f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par l'égalité $z' = z^2 - 4z + 6$.
   On désigne par Γ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   Ce cercle ne sera pas tracé sur le dessin,
   (a) Vérifier l'égalité suivante $z' - 2 = (z - 2)^2$.
   (b) Soit M le point de Γ d'affixe $z = 2 + \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ désigne un réel de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
   Vérifier l'égalité suivante : $z' = 2 + 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$ et en déduire que M' est situé sur un cercle Γ' dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ' sur le dessin,

3. On appelle D le point d'affixe $d = 2 + \dfrac{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}}{2}$ et on désigne par D′ l'image de D par f.
   (a) Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $d - 2$.
   En déduire que D est situé sur le cercle Γ.
   (b) À l'aide la question 2 b, donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{AD'}}\right)$ et placer le point D′ sur le dessin.
   (c) Démontrer que le triangle DAD′ est équilatéral.

Exercice 4

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, où x, x', y, y' sont des nombres réels. On rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathrm{Re}(z'\overline{z}) = 0$.
2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $\mathrm{lm}(z'\overline{z}) = 0$.

Applications

3. N est le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}N}$ soient orthogonaux ?
4. On suppose z non nul. P est le point d' affixe $\dfrac{1}{z^2} - 1$.
   On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.
   (a) Montrer que $\left(\dfrac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right) = -\overline{z}^2 \left|\dfrac{1}{z^2} - 1\right|^2$.
   (b) En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

Exercice 5

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique I cm.

1. *Question de cours*
   On rappelle que : « Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\overrightarrow{w}\|$ et $\arg(z) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$ ».
   Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.
   (a) Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p - m}{n - m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.
   (b) Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p - m}{n - m}\right|$
2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 4 + \mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = 1 + \mathrm{i}$, $z_{\mathrm{C}} = 5\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{D}} = -3 - \mathrm{i}$ Placer ces points sur une figure.
3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1 + 2\mathrm{i})z - 2 - 4\mathrm{i}$.
   (a) Préciser les images des points A et B par f.

(b) Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω.

4. (a) Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :

$$z' - z = -2\mathrm{i}(2 - \mathrm{i} - z).$$

(b) En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega},\ \overrightarrow{MM'}\right)$

(c) Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

(d) Soit E le point d'affixe $z_{\mathrm{E}} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$. Écrire z_{E} sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E′ associé au point E.

Exercice 6

Les parties A et B sont indépendantes

On considère l'équation (E)

$$z^3 - (4 + \mathrm{i})z^2 + (7 + \mathrm{i})z - 4 = 0$$

où z désigne un nombre complexe.

Partie A

1. (a) Montrer que (E) admet une solution réelle, note z_1.

   (b) Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3 - (4 + \mathrm{i})z^2 + (7 + \mathrm{i})z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2\mathrm{i})(az + b)$$

2. Résoudre (E).

Partie B

Dans le plan muni dun repère ort.honormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $1,\ 2 + 2\mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$.

1. Représenter A, B et C.
2. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2 + 2\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$. En déduire la nature du triangle OBC.
3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifter votre affirmation.
4. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre C. Déterminer l'affixe de D.
5. Quelle est. la nature de OCDB ?

Exercice 7

On construira une figure que l'on complétera au fur et mesure.

1. Soit A le point d'affixe 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On note B, C, D, E et F les images respectives des points A, B, C, D et E par la rotation r. Montrer que B a pour affixe $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
2. Associer à chacun des points C, D, E et F l'une des affixes de l'ensemble suivant

$$\left\{-3\ ;\ -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\ ;\ \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\ ;\ -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$$

3. (a) Déterminer $r(\mathrm{F})$.
   (b) Quelle est la nature du polygone ABCDEF ?
4. Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit s' la similitude directe de centre E transformant F en C.
   (a) Déterminer l'angle et le rapport de s'. En déduire l'angle et le rapport de $s' \circ s$.
   (b) Quelle est l'image du point D par $s' \circ s$?
   (c) Déterminer l'écriture complexe de $s' \circ s$.
5. Soit A$'$ le symétrique de A par rapport à C.
   (a) Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(\mathrm{A}')$ puis l'image de A$'$ par $s' \circ s$.
   (b) Calculer l'affixe du point A$'$. Retrouver alors le résultat du **a.** en utilisant l'écriture complexe de $s' \circ s$.

Exercice 8

1. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. Soit R la rotation du plan de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ. L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :
   - $R(\Omega) = \Omega$
   - pour tout point M du plan, distinct de Ω, l'image M' de M est définie par $\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \quad [2\pi]$.

   On rappelle que, pour des points A et B d'affixes respectives a et b, $AB = |b-a|$ et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi]$.
   Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R, sont liées par la relation
   $$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega).$$
2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{I}} = 1 + \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = 2 + 2\mathrm{i}$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.
   (a) Donner l'écriture complexe de R.
   (b) Soit A l'image de I par R. Calculer l'affixe z_{A} de A.
   (c) Montrer que O, A et B sont sur un même cercle de centre I. En déduire que OAB est un triangle rectangle en A. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.
   (d) En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$.

Exercice 9

1. On considère le polynôme P défini par :
   $$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16.$$
   (a) Calculer P(4).

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ cm.
Soient A,B, C les points d'affixes respectives :

$$a = 4 \qquad b = 1 + i\sqrt{3} \qquad c = 1 - i\sqrt{3}$$

(a) Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

(b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$
On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

(a) Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?

(b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.

(a) Montrer que le quadrilatère COFH est un carré.

(b) Calculer l'affixe du point H.

(c) Le triangle AGH est-il équilatéral ?

Exercice 10

Le plan (P) est muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
À tout point M du plan (P) est associé le nombre complexe z, affixe du point M.

1. (a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = -1, \quad z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \ z_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

(b) Déterminer le module et un argument de chacun des cubes z_1^3, z_2^3, z_3^3 des complexes ci-dessus, puis la partie réelle et la partie imaginaire de z_1^3, de z_2^3 et de z_3^3.

2. (a) Si $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ est un nombre complexe (avec y et θ réels et ρ réel supérieur à zéro), déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^3 en fonction de x et y, puis le module et un argument de z^3 en fonction de ρ et θ.

(b) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z caractérisé par : z^3 est un nombre réel.

(c) Déterminer et tracer l'ensemble (E′) des points M d'affixe z, caractérisé par : z^3 est un nombre réel et $1 \leqslant z^3 \leqslant 8$.

Exercice 11

Le plan est rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$orthonormal direct ; unité graphique 2 centimètres.
On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.
Soit I le point d'affixe 2i.
On nomme f la transformation qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = iz$.

1. (a) Préciser la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.
   (b) Déterminer l'affixe du point A$'$, image par f du point A d'affixe $1+\sqrt{2}+\mathrm{i}$.
   (c) Montrer que les points A, I et A$'$ sont alignés.
2. (a) Montrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, I et M' sont alignés, est le cercle de centre Ω d'affixe $1+\mathrm{i}$ et de rayon $\sqrt{2}$.
   (b) Vérifier que le point A appartient à (Γ).
   (c) Déterminer l'ensemble (Γ') décrit par le point M' lorsque le point M décrit (Γ).
3. Soit B le point d'affixe $2+2\mathrm{i}$ et B$'$ l'image de B par f.
   (a) Démontrer que les droites (AB) et (A$'$B$'$) sont perpendiculaires.
   (b) Soit C le point d'intersection des droites (AB) et (A$'$B$'$). Déterminer la nature du quadrilatère OACA$'$.

Exercice 12

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 5 cm). On considère les points A d'affixe $\sqrt{2}$, et B d'affixe i. Soit C te point tel que OACB soit un rectangle. On note I le milieu du segment [OA], J le milieu du segment [BC] et K le milieu du segment [AI]. Placer ces points sur une figure.

1. On considère la transformation s de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', tel que
$$z' = -\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}.$$
   (a) Démontrer que s est une similitude dont le centre Ω a pour affixe $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$ et dont on déterminera le rapport k et une mesure θ de l'angle.
   (b) Determiner les images par s des points O, A, B, C.
2. (a) Calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}\right)$.
   En déduire que les points A, B et Ω sont alignés.
   (b) Démontrer de même que les points I, C, Ω sont alignés.
   (c) En déduire une construction de Ω. Placer Ω sur la figure.
3. (a) Montrer que Ω appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs [BC] et [AI].
   (b) Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{J}\Omega}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JK}}$ sont colinéaires.
   (c) Demontrer que la droite $(\Omega\mathrm{O})$ est la tangente commune à Γ_1 et Γ_2.
   Représenter les cercles Γ_1, Γ_2 et la droite $(\Omega\mathrm{O})$ sur la figure.

Exercice 13

Les questions 2 *et* 3 *sont indépendantes.*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$.
   On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.
2. (a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.

(b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$

3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$(unité : 1 cm), on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-\mathrm{i})$ et le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   (a) Déterminer l'affixe du point M_3 image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport - 3.
   (b) Déterminer l'affixe du point M_4 image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   (c) Placer dans le même repère les points A, M_1, M_2, M_3 et M_4.
   (d) Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.
   (e) Soient I le milieu du segment $[\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que les points M_1, M_3, M_5 et M_4 forment un carré.

Exercice 14

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$, l'unité graphique étant 4 cm.
On considère les points A_0, A_1 d'affixes respectives : $a_0 = 1$; $a_1 = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{12}}$.
Le point A_2 est l'image du point A_1 par la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$.

1. (a) Calculer l'affixe a_2 du point A_2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
   (b) Soit I le milieu du segment $[\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2]$. Calculer l' affixe du point I.
   (c) Faire une figure.
2. (a) Prouver que les droites (OI) et (OA_1) sont confondues.
   (b) Écrire sous forme trigonométrique l'affixe de I.
   (c) Déterminer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ (les valeurs exactes sont exigées), sachant que $\sqrt{4\sqrt{3}+8} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$.

Exercice 15

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$.
On considère le point A d'affixe 1 et, pour tout θ appartenant à $[0\ ;\ 2\pi[$, le point M d'affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
On désigne par P le point d'affixe $1+z$ et par Q le point d'affixe z^2.

1. À partir du point M, donner une construction géométrique du point P et une construction géométrique du point Q. Les points O, A, M, P et Q seront placés sur une même figure.
2. Déterminer l'ensemble des points P pour θ appartenant à $[0\ ;\ 2\pi[$.
   Tracer cet ensemble sur la figure précédente.
3. Soit S le point d'affixe $1+z+z^2$ où z désigne toujours l'affixe du point M. Construire S, en justifiant la construction.
4. Dans le cas où S est différent de O, tracer la droite $(\mathrm{O}S)$. Quelle conjecture apparaît, relativement au point M ?
   Démontrer que le nombre $\dfrac{1+z+z^2}{z}$ est réel, quel que soit θ appartenant à $[0\ ;\ 2\pi[$.
   Conclure sur la conjecture précédente.

Exercice 16

1. Pour tout nombre Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.
   (a) Factoriser $P(Z)$.
   (b) En déduire les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation $P(Z) = 0$, d'inconnue Z.
   (c) Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :
$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$
2. (a) Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$ (l'unité graphique est 5 cm).
   Placer les points A, B et C d'affixes respectives :
$$a = -\,2,\ b = -\ \frac{1}{5} -\ \frac{3}{5}\mathrm{i} \text{ et } c = -\ \frac{1}{5} +\ \frac{3}{5}\mathrm{i}$$
   (b) Démontrer que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.
3. Placer le point D d'affixe $d = -\ \frac{1}{2}$.
   Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :
$$z' = \frac{a-c}{d-c}$$
   En déduire le rapport $\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CD}}$.
   Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

Exercice 17

Partie A

1. Déterminer le nombre complexe α tel que $\begin{cases} \alpha(1+\mathrm{i}) & = & 1+3\mathrm{i} \\ \mathrm{i}\alpha^2 & = & -4+3\mathrm{i} \end{cases}$
2. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2 - (1+3\mathrm{i})z + (-4+3\mathrm{i})$.
   Montrer que $f(z)$ s'écrit sous la forme $(z-\alpha)(z-\mathrm{i}\alpha)$.
   En déduire les solutions sous forme algébrique de l'équation $f(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$, unité graphique : 5 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2+\mathrm{i}$ et $b = -1+2\mathrm{i}$.
   Placer A et B dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.
   Montrer que $b = \mathrm{i}\alpha$, en déduire que le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \frac{\pi}{2}$.
2. On considère le point C d'affixe $c = -1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point D tel que le triangle OCD soit un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}\right) = \frac{\pi}{2}$.
   On pourra conjecturer l'affixe de D à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.

3. Soit M le milieu de [CB]. On appelle $z_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$ et $z_{\overrightarrow{\mathrm{DA}}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$.
   Prouver que : $\dfrac{z_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{DA}}}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.
4. Donner une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{DA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.
5. Prouver que $\mathrm{OM} = \dfrac{1}{2}\mathrm{DA}$.
6. On appelle J, K et L les milieux respectifs des segments [CD], [DA] et [AB].
   On admet que le quadrilatère JKLM est un parallélogramme. Démontrer que c'est un carré.

Exercice 18

(Pour Série D)

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$.
On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i. On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB).
   Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe
   $z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.
2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2. Donner l'écriture complexe de H.
3. On note f la composée $H \circ S$.
   (a) Montrer que f est une similitude.
   (b) Déterminer l'écriture complexe de f.
4. On appelle M'' l'image d'un point M par f.
   (a) Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = -2\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ est la droite (AB).
   (b) Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = 2\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

Exercice 19

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

1. Soit E le point d'affixe $z_{\mathrm{E}} = -\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point E$'$, image de E par f
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.
3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.
   Soit M un point distinct des points O, A et B.
   (a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1, on a :

$$\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

(b) En déduire une expression de $\dfrac{M'\mathrm{B}}{M'\mathrm{A}}$ en fonction de $\dfrac{M\mathrm{B}}{M\mathrm{A}}$ puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{M'\mathrm{A}}, \overrightarrow{M'\mathrm{B}}\right)$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}}, \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)$

4. Soit Δ la médiatrice du segment [A, B]. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.
5. Soit Γ le cercle de diamètre [A, B].
   (a) Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).
   (b) Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

Exercice 20

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :

Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe. Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonomal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_A = -\sqrt{3} - \mathrm{i},\ z_B = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3},\ z_C = \sqrt{3} + \mathrm{i} \text{ et } z_D = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

1. (a) Donner le module et un argument-de chacun des quatre nomlres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.
   (b) Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).
   (c) Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\dfrac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.
2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z + 2$.
   (a) Déterminer les éléments caractéristiques de g.
   (b) Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O.
   (c) Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.

Exercice 0.1. *Applcation $z \mapsto a\overline{z} + b$.*
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on note $g_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = a\overline{z} + b$ et $T_{a,b} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'application du plan complexe dans lui même qui au pont d'affixe z, associe le point d'affixe $a\overline{z} + b$.

1. (a) Montrer que, si $|a| \neq 1$ et $a \neq 0$, $T_{a,b}$ est la similitude indirecte de centre Ω, d'affixe $\frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$, de rapport $|a|$, d'axe $(\mathcal{D})$ passant par Ω et d'angle polaire $\frac{1}{2}arg(a)[\pi]$, c'est-à-dire la composée commutative de l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$ et de la symétrie orthogonale par rapport à $(\mathcal{D})$.

(b) Montrer que si $|a| = 1$, $T_{a,b}$ est la composée commutative de la symétrie $S_{(\mathcal{D})}$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$ d'angle polaire $\frac{1}{2}arg(a)$ et passant par le point d'affixe $\frac{b}{2}$, et de la translation de vecteur $\frac{1}{2}(a\bar{b} + b)$,(symétrie glissée).

2. (a) Soient $\Omega \in \mathcal{P}$, (D) une droite de $\mathcal{P}$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la similitude indirecte de centre Ω, de rapport ρ, d'axe (D) correspond à l'application $g_{a,b}$ où $a = \rho e^{2i\theta}$ (θ étant l'angle polaire de (D) et b l'unique complexe tel que $\omega = \frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$ où ω est l'affixe de Ω).

   (b) Soit (D) une droite de $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Montrer que la composée de la symétrie de la symétrie orthogonale par rapport à (D) et de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ correspond à l'application $g_{a,b}$ où $a = e^{2i\theta}$ (θ étant l'angle polaire de (D)) et b est l'image de O par la symétrie glissée.