

Parade 10/05/22

EPREUVE DE MATHÉMATIQUE
Partie A : Evaluation des Ressources (64 points).

Exercice 1 : 20 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

A) On considère l'équation (E) : $z^3 - (6 + i)z^2 + (13 + 2i)z - 8 - i = 0$

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à : $(z - 1)(z^2 - (5 + i)z + 8 + i) = 0$
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

B) On considère les points A, B et D d'affixes respectives 1, $2 - i$ et $3 + 2i$. On note C le milieu du segment [AD].

1. Placer ces points dans le plan complexe.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.
3. Soit r la rotation de centre A qui transforme B en C et h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On pose $s = h \circ r$.
 - (a) Quel est l'angle de r ?
 - (b) Démontrer que $h(C) = D$, puis déterminer $s(B)$.
 - (c) Donner la nature et les éléments caractéristiques de s .
 - (d) En déduire que s a pour écriture complexe : $z' = 2iz + 1 - 2i$
4. Soit (C) l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 2 + i| = 1$ et (C') l'image de (C) par s .
 - (a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (C) .
 - (b) Déterminer une équation cartésienne de (C') .

Exercice 2 : 17 points

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. L'unité de longueur est de 2cm. Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x \ln x - x - 1 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$
 et (C_f) sa représentation graphique.

1. (a) Montrer que f est continue en 0.
- (b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et donner l'interprétation géométrique du résultat.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha \in]3,5; 3,6[$.
4. Tracer soigneusement (C_f) dans le repère.
5. Calculer l'aire en cm^2 de la portion du plan délimitée par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
6. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.
 - (a) Montrer que h est une bijection de $[1; +\infty[$ vers $[-2; +\infty[$.
 - (b) La réciproque h^{-1} de h est-elle dérivable en -2 ? Justifier la réponse.
 - (c) Justifier que h^{-1} est dérivable sur $]-2; +\infty[$ et calculer $(h^{-1})'(0)$ en fonction de α .
 - (d) Tracer la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère que (C_h) .

Exercice 3 : 16 points

1. On place 10 kg de sel dans un grand récipient d'eau à l'instant $t = 0$ et on note $f(t)$ la quantité de sel dissoute (en kg) à l'instant t (en min). la vitesse de dissolution du sel est proportionnelle à la quantité non encore dissoute, à tout instant. On a ainsi : $f'(t) = \lambda(10 - f(t))$, où λ est une constante réelle non nulle et positive.
 - (a) Sachant que le premier kg de sel est dissout en 5 min, exprimer $f(t)$ en fonction de t .

Une entreprise achète, utilise et vend des machines après un certain nombre x_i d'années. L'évolution du prix de vente y_i d'une machine en fonction du nombre d'années d'utilisation est présentée comme suit :

Nombre d'années x_i	1	2	3	4	5	6
Prix y_i en milliers de FCFA	150	125	90	75	50	45

- Construire le nuage de points de cette série et placer le point moyen G. 2,5pts
- Ecrire l'équation de la droite de MAYER. 2,5pts
- Déterminer une équation de la droite de régression de y en x . 3pts
- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire et interpréter le résultat. 1,75p
- En déduire l'estimation du prix de vente d'une machine après 7 années d'utilisation. 1,75p

Exercice 4 : 11 points

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = xe^{-x}$.

- g et h sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la relation $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = h(x)e^{-x}$.
 - Montrer que g est solution de (E) si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = x$. 2pts
 - En déduire la fonction h associée à une solution de (E) telle que $h(0) = 0$. 2pts
 - Quelle est alors la fonction g ? 1,5pt
- Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - Montrer que φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$. 2pts
 - Résoudre l'équation (F). 1,5pt
 - Déterminer la solution générale φ de l'équation (E). 2pts

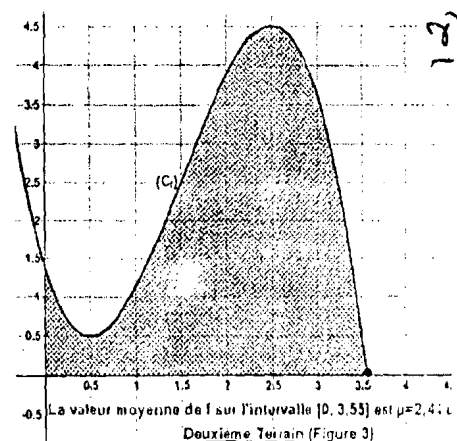
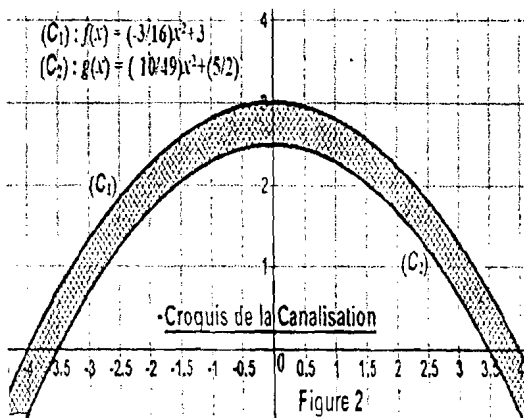
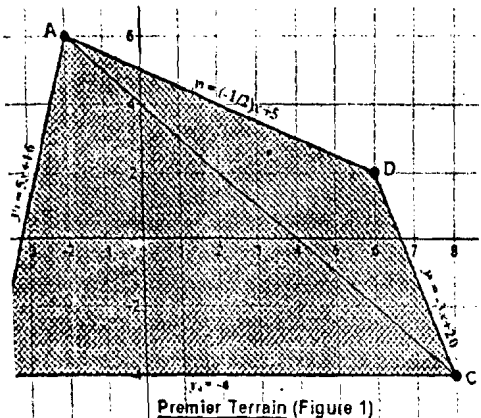
Partie B : Evaluation des Compétences (16 points).

Compétences visées : Résoudre une situation problème à l'aide du langage mathématique dans des situations de vie où intervient les fonctions et le calcul d'aire à l'aide d'une intégrale.

Monsieur JOB dispose de deux terrains. Le premier terrain a la forme d'un quadrilatère ABCD et est limitrophe à la route, la nationale n°3 (Figure 1). Une entreprise Camerounaise en charge des travaux de réfection de cette route, a dévié entièrement une canalisation en eau sur ce terrain. Cette canalisation est la partie hachurée, délimitée par deux fonctions polynômes du second degré (Figure 2). La déviation due à cette canalisation va entraîner des pertes sur les cultures de Mr JOB et ce dernier sera dédommagé à hauteur de 1950 Francs cfa le mètre carré de culture endommagée. La partie hachurée sur la Figure 3 représente le deuxième terrain.

Une unité sur les axes est égale à 14 mètres.

Les terrains sont situés dans une zone où le mètre carré est vendu à 7500 Francs cfa.



On demande :

- Déterminer la valeur du premier terrain de Mr JOB ? 5 pts
- Déterminer le montant du dédommagement de Mr JOB. 5 pts
- Déterminer la valeur du deuxième terrain de Mr JOB ?