



EXERCICE1

Déterminer les entiers positifs a et b sachant que $a < 4000$ et que la division euclidienne de a par b

- 1- Donne un quotient de 82 et un reste de 47.
- 2- Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $2^{2013} + 562$ par 4
- 3- Quand on divise un nombre par 12, le reste est 8. Quand on divise ce même nombre par 10, on augmente le quotient de 1 et le reste devient 2. Quel est ce nombre?
- 4- Démontrer que sur la droite $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$, il n'y a pas de points à coordonnées entières.

EXERCICE2 Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $x^n + y^n = (x + y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$.

En déduire que $609 \mid 5^{4n} - 2^{4n}$.

EXERCICE3 Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise $3n-17$.

EXERCICE4 Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer le reste dans la division euclidienne par n de la somme des n premiers entiers strictement positifs.

EXERCICE5

Soient a, b, n trois entiers supérieurs ou égaux à 1. On note q le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b , et r le reste. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} .

EXERCICE6 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $40^n \times n! \mid (5n)!$.

EXERCICE7 Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $2^k = a^2 + b^2$, avec $k \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$

1. Démontrer que si N, a et b sont des entiers tels que $N = a^2 + b^2$ et N est un multiple de 4, alors a et b sont pairs.
2. En déduire que l'équation $2^{2n} = a^2 + b^2$, $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, n'admet pas de solutions.
3. Démontrer que l'équation $2^{2n+1} = a^2 + b^2$, $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, admet une unique solution que l'on précisera.

EXERCICE8 Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $(3 - \sqrt{5})^n + (3 + \sqrt{5})^n$, est divisible par 2^n .

EXERCICE9 Soit n un entier qui est le produit de k entiers distincts, $k \geq 0$. Démontrer que n admet au moins $\frac{k(k-1)}{2} + 1$ diviseurs distincts.

EXERCICE10 Résoudre les équations d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ $x^2 - y^2 = 7$ $9x^2 - y^2 = 32$

EXERCICE11

Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, les équations diophantiennes suivantes :

$$xy = 2x + 3y \quad x^2 - y^2 - x + 3y = 30$$

EXERCICE12

- 1- Déterminer, suivant les puissances de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.
- 2- Quel est le reste de la division par 5 de 1357^{2013} ?



EXERCICE13Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n(n+2)(7n-5)$ est divisible par 6.

EXERCICE14 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a = n^5 - n$.

1. Démontrer que a est divisible par 5.
2. En remarquant que $a = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$, démontrer que a est divisible par 2 et par 3.
3. Démontrer que a est divisible par 30.

EXERCICE15Démontrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

EXERCICE16

1. Déterminer les entiers naturels n tels que $5^n \equiv -1[13]$.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que 13 divise $5^{2n} + 5^n$.

EXERCICE17 Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 2$. On suppose que $a \equiv b[n]$. Démontrer que $a^n \equiv b^n[n^2]$.

EXERCICE18Démontrer que 13 divise $3^{126} + 5^{126}$.

EXERCICE19Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}^2$: 1. $x^2 - 5y^2 = 3$ (on raisonnera modulo 5); 2. $15x^2 - 7y^2 = 9$ (on raisonnera modulo 5).

EXERCICE20Démontrer que, pour tout entier naturel n , $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

EXERCICE21

Résoudre les équations suivantes : 1. $5x \equiv 3[17]$; 2. $10x \equiv 6[34]$; 3. $10x \equiv 5[34]$.

EXERCICE22Résoudre le système suivant, d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:
$$\begin{cases} x \equiv 1[5] \\ x \equiv 2[11]. \end{cases}$$

EXERCICE23

Un nombre palindrome est un nombre qui se lit indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, 2002, 12321 sont des nombres palindromes. Prouver qu'un nombre palindrome ayant un nombre pair de chiffres est divisible par 11