Ministère des Enseignements Secondaires
GROUPE « AGIR COMPETENT »
LYCEE CLASSIQUE D'EDEA / COPOLY
Tel : 697 26 38 45 / 682 80 90 67
Responsable : T. N . AWONO MESSI

Année scolaire : 2022-2023
Epreuve : Mathématiques
Durée : 3h 15h00-18h00
Mercredi, 28 septembre 2022

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES N° 2 : CLASSE DE T^{le} C,D,TI

FONCTIONS NUMERIQUES

EXERCICE 1

1. Calcule les limites suivantes :

   a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-2}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{x^2-1}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{3x-\pi}$

2. Soit f une fonction vérifiant la relation $\left|f(x)+2\right|\leq\dfrac{4x}{x^2+1}$
   Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
3. Soit h la fonction définie par $h(x)=\dfrac{-1+\sqrt{x+1}}{x}$.
   - **(a)** Détermine l'ensemble de définition de h.
   - **(b)** Démontre que h admet un prolongement par continuité en 0 et le définir.

EXERCICE 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3+x^2-1$.

1. Etudie les variations de g.
2. Montre que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. Donne un encadrement de α d'amplitude $0{,}1$.
4. Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2+4}-\dfrac{x}{2}-2$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
2. Etudie les branches infinies de (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$.

1. Montre que $f(x)=0 \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x$.
2. Prouve que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique λ sur $]1;2[$.
3. On note g la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $g(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
   - **(a)** Montre que pour tout x dans $]1;+\infty[$, $\left|g'(x)\right|\leq\dfrac{1}{2}$.
   - **(b)** Déduis-en que pour tout x dans $]1;+\infty[$, $\left|g(x)-\lambda\right|\leq\dfrac{1}{2}\left|x-\lambda\right|$.

EXERCICE 5

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie sur $[-1;1]$ par : $f(x)=\left(1-\sqrt{|x|}\right)^2$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.(unité graphique : 3cm)

1. Etudier la parité de f. Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire ?
2. Soit g la restriction de f à $[0;1]$.
   (a) Vérifier que $g(x)=\left(1-\sqrt{x}\right)^2$ pour tout $x\in[0;1]$.
   (b) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0. Qu'en conclure pour la courbe $\mathscr{C}$ de f ?
   (c) Montrer que pour tout $x\in\,]0;1]$, $g'(x)=\dfrac{-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.
   (d) Dresser le tableau de variation de g.
3. **(a)** Représenter soigneusement dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ de f.
   (b) Construire dans le même repère la courbe $\mathscr{C}'$ de la fonction $h: x\mapsto -f(x)$.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur $]0;\pi[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la fonction f et construire $\mathscr{C}$.
2. Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ possède une fonction réciproque g^{-1}, dont on construira la courbe dans le même repère que $\mathscr{C}$.
3. Soit $y=g^{-1}(x)$. Montrer que $\sin y=\dfrac{1}{x}$ et que $\cos y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.
4. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]1;+\infty[$ et que pour tout $x\in\,]1;+\infty[$, on a :
   $\left(g^{-1}\right)'(x)=-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

EXERCICE 7

L'agence spatiale américaine (**NASA**) localise une comète se dirigeant suivant la courbe C_f de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=3+\sqrt{x}$ vers la planète terre et, programme alors le lancement d'un missile longue portée suivant la direction de la courbe C_g de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^2$.

Tâche : Est-il possible que le missile intercepte la comète ?

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie sur $I=\,]-1;1[$ par $f(x)=-1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
2. Construis la courbe C_f tout en précisant ses points d'intersection avec les axes du repère.
3. **(a)** Montre que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
   (b) Construis $C_{f^{-1}}$ dans le repère précédent.
   (c) Explicite $f^{-1}(x)$ en fonction de x.