Ministère des Enseignements Secondaires
GROUPE « AGIR COMPETENT »
LYCEE CLASSIQUE D'EDEA / COPOLY
Tel : 697 26 38 45 / 682 80 90 67
Responsable : T. N . AWONO MESSI

Année scolaire : 2022-2023
Epreuve : Mathématiques
Durée : 3h 15h30-18h30
Vendredi, 23 septembre 2022

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES N° 1 : CLASSE DE T^{le} C,D,TI
NOMBRES COMPLEXES : APPROCHE ALGEBRIQUE

EXERCICE 1

Détermine l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 5(2+3i)-3(4-5i)$; $z_2 = (3-i)(4-5i)$; $z_3 = -4i(5+i)-3i$; $z_4 = (3-4i)(3+4i)$.

EXERCICE 2

1. Détermine le conjugué du nombre complexe z dans chaque cas :
   $z = 3-i$; $z = -3-i$; $z = 2i$; $z = -3$
2. Détermine le module de chacun des nombres complexes suivants :
   $z = 3+i$; $z = -1-2i$; $z = 1-i$; $z = (3+i)(1+2i)$
3. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   a) $3z - 4i = (2-i)z + 1 - i$; b) $\dfrac{z+1}{z-i} = 2i$; c) $3z - i\overline{z} = 1 + 2i$

EXERCICE 3

1. Détermine les racines carrées du nombre complexe $\Delta = -3+4i$.
2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 + (3-6i)z - 6 - 10i = 0$.

EXERCICE 4

On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P à variable complexe z défini par :

$P(z) = (1+i)z^3 - (3+2i)z^2 + (4+2i)z - 2$.

1. Montre que $1+i$ est une racine de P.
2. On admet qu'il existe 3 nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z-1-i)(az^2 + bz + c)$.
   (a) Montre que $a = 1+i; b = -3$ et $c = 1-i$.
   (b) Résous alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan d'affixe $z \neq 1-i$ tels que le nombre complexe $z' = \dfrac{z}{z-1+i}$ soit imaginaire pur.
   (a) En posant $z = x+iy$, montre que : $z' = \dfrac{x^2+y^2-x+y}{(x-1)^2+(y+1)^2} - i\dfrac{x+y}{(x-1)^2+(y+1)^2}$.
   (b) Détermine alors $\mathscr{E}$.

EXERCICE 5

1. Résous dans $\mathbb{C}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 3z - 2iz' = 5 - 5i \\ 2iz - 3z' = -1 - i \end{cases}$
2. Soit $z \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ de module 1. Montre que $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur.

EXERCICE 6

Pour la construction de son nouveau siège, L'**INS** (Institut National de Statistiques) a acheté un terrain de forme rectangulaire dont les coordonnées géodésiques des sommets sont les points images des solutions de l'équation

$$(E):\left[z^2+(-20+40i)z-300-1200i\right]\left[z^2+(40-20i)z+300-1200i\right]=0.$$

L'unité de longueur est le mètre. L'**INS** engage un ingénieur en bâtiment pour clôturer la parcelle. Celui-ci propose un devis de 17.225 **FCFA** par mètre de mur tout en prévoyant une ouverture de $5m$ pour un portail estimé à $1.002.500$ **FCFA**.

Tâche : Détermine le montant total du devis présenté par l'ingénieur.

EXERCICE 7

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3-(1-i)z^2+(1-i)z+i=0.$

1. Montre que (E) possède une unique solution imaginaire pure que l'on précisera.
2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

EXERCICE 8

1. Montre que $(1+i)^6=-8i.$
2. On considère l'équation $(E): z^2=-8i.$

   Déduis-en de **1.** une solution de l'équation (E). Détermine l'autre solution.

EXERCICE 9

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit M le point d'affixe $z\neq -3+i$ et Z le nombre complexe défini par : $Z=\dfrac{z+2i}{z+3-i}$.

1. On pose $z=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$.

   Détermine en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
2. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que Z soit imaginaire pur et $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que Z soit réel.
   - **(a)** Détermine et construis $\mathscr{C}$.
   - **(b)** Détermine et construis $\mathscr{D}$. Unité graphique : $2cm$.

EXERCICE 10

1. **(a)** Ecris $\left(1-3i\sqrt{3}\right)^2$ sous la forme algébrique.

   (b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-\left(9+i\sqrt{3}\right)z+26+6i\sqrt{3}=0.$
2. P est le polynôme à variable complexe z défini par

   $P(z)=z^3-\alpha z^2+\left(29-3i\sqrt{3}\right)z-18+26i\sqrt{3}$ où α est un nombre complexe.

   (a) Détermine α sachant que $-i\sqrt{3}$ est une racine de P.

   (b) Détermine les nombres complexes b et c tels que :

   $z^3-\alpha z^2+\left(29-3i\sqrt{3}\right)z-18+26i\sqrt{3}=\left(z+i\sqrt{3}\right)\left(z^2+bz+c\right).$