

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES N°1 DU 1^{er} TRIMESTRE

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (3,5 points)

- (a) Ecris sous forme algébrique $(4 - 2i)^2$. 0,5pt

(b) Résous dans \mathbb{C} , l'équation $(E): z^2 + (2 - 4i)z - 6 = 0$. 0,75pt
- Pour tout nombre complexe z , on pose $P(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + (2 + 4i)z - 12i$.

(a) Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera. 1pt

(b) Trouve les nombres complexes a, b et c tels que $P(z) = (z + 2i)(az^2 + bz + c)$. 0,75pt

(c) Résous alors l'équation $P(z) = 0$. 0,5pt

EXERCICE 2 : (4,25 points)

- Calcule chacune des limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$; (b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$; (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$; (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{2x^2 + 5}$. 2pts

- Soient f et g les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ vérifiant pour tout $x > 0$, $|2f(x) - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{x}$ et pour tout $x \geq 1$, $\frac{x-1}{x+1} \leq g(x) \leq \frac{1}{x} + 1$.

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ en citant le théorème utilisé. 1pt

- Soit h la fonction numérique définie sur $[1; +\infty[$ par $h(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$. On note C_h la courbe représentative de h dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
Etudie l'existence et la nature de la branche infinie de C_h en $+\infty$. 1,25pt

EXERCICE 3 : (3,5 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit M le point d'affixe $z \neq -2i$ et Z le nombre complexe défini par $Z = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}$. On pose $z = x + iy$ avec x et y deux réels.

- Montre que $\operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2}$ et $\operatorname{Im}(Z) = \frac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y + 2)^2}$. 1,5pt
- Déduis-en la nature de :
 - L'ensemble \mathcal{D} des points M du plan d'affixe z , tel que Z soit un réel. 0,75pt
 - L'ensemble \mathcal{E} des points M du plan d'affixe z , tel que Z soit un imaginaire pur. 0,75pt
 - Construis les ensembles \mathcal{D} et \mathcal{E} dans le même repère. 0,5pt

EXERCICE 4 : (3,25 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x + \cos x$.

1. (a) Justifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 - x \leq f(x) \leq 1 - x$. 0,25pt
(b) Déduis-en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 0,5pt
2. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variations. 1pt
3. Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur \mathbb{R} . 0,5pt
4. Calcule $f(0)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, puis donne un encadrement de α à 10^{-1} près. 1pt

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

SITUATION :

Pour embellir trois espaces de son parc de loisirs, **M. ATEBA** voudrait réaliser des travaux d'aménagement. Il décide pour cela d'aménager :

Un premier espace couvert d'un gazon vendu à 1500 FCFA le m^2 et ayant la forme d'un triangle équilatéral ABC . Les sommets A, B et C de ce triangle sont les points du plan d'affixes solutions de l'équation $(E_1) : (z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$;

Un deuxième espace couvert de pavés vendus à 2500 FCFA le m^2 et ayant la forme d'un trapèze $LMNP$. Les sommets L, M, N et P de ce trapèze sont les points du plan d'affixes solutions de l'équation $(E_2) : [z^2 + (1 + 6i)z - 10 + 6i][z^2 + (1 - 6i)z - 10 - 6i] = 0$;

Un troisième espace couvert d'un béton imprimé coûtant 3500 FCFA le m^2 et ayant la forme de l'ensemble \mathcal{E} des points M du plan d'affixes z tel que $|z - 4 + i| = |1 - i\sqrt{3}|$.

Sur ce plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , l'unité de longueur est égale à 10m. On prendra $\pi \approx 3,14$ et $\sqrt{3} \approx 1,7$.

Avant de commencer les travaux, il voudrait connaître le coût du matériel nécessaire pour couvrir chacun des trois espaces sur lesquels sont prévus ces travaux.

Tâches :

1. Calcule le coût du gazon nécessaire pour couvrir l'espace ayant la forme d'un triangle équilatéral. 1,5pt
2. Calcule le coût des pavés nécessaires pour couvrir l'espace ayant la forme d'un trapèze. 1,5pt
3. Calcule le coût du béton imprimé nécessaire pour couvrir le troisième espace. 1,5pt

Présentation générale : 0,5pt