MINESEC

DRES-OUEST

Département de Mathématiques

LYCEE BILINGUE DE DSCHANG

Année scolaire : 2022-2023

Classe : Première C

Durée : 3 heures ; Coefficient : 6

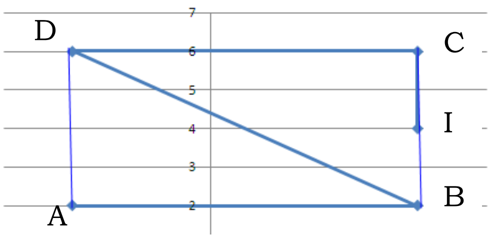
Evaluation N° : 1

**Corrigé proposé par M. FOMO KAMGANG Vidal Valdimy**

**Partie A : Evaluation des ressources**

**Exercice 1 :**

**1) Construction des points A, B,C, D, I :** $\boldsymbol{C(3;6) et\ I(3;4)}$.




**2) Représentation paramétrique de $(\Gamma)$.**

$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 3^2$ $(\Gamma)$ est un cercle de centre $\Omega(3\ ;1)$ et de rayon 3. L'équation paramétrique est alors :

$\begin{cases} x = 3 + 3\cos t \\ y = 1 + 3\sin t \end{cases} t \in IR.$

**a) Montrons que $I \in (\Gamma)$.**

En effet, $3^2 + 4^2 - 6(3) - 2(4) + 1 = 26 - 26 = 0$. D'où $I \in (\Gamma)$.

**b)** Equation de la tangente (T).

$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{I\Omega} = 0$ avec $M(x;y) \in (T)$. On obtient $\boldsymbol{(T): y = 4}$.

**3) Démontrons que $(\Gamma)$ coupe l'axe des abscisses en deux points.**

En effet, l'axe des abscisses a pour équation y = 0. Alors, $x^2 - 6x + 1 = 0\ soit\ x = 3 - 2\sqrt{2}\ ou\ x = 3 + 2\sqrt{2}$. Donc, ce cercle coupe l'axe des abscisses en deux points $\boldsymbol{M(3 - 2\sqrt{2}\,;0) et\ M'(3 + 2\sqrt{2}\,;0)}$.

**4)** a) Vérifions que $C \notin (\Gamma)$.

En effet, $3^2 + 6^2 - 6(3) - 2(6) + 1 = 16 \neq 0$ D'où $\boldsymbol{C \notin (\Gamma)}$.

**b) Montrons que $(D_m) : mx - y + 6 - 3m = 0$.**

**Deux méthodes sont possibles :**

- **1ère méthode :**

$(D_m)$ a pour équation $ax + by + c = 0$ ou a, b et c sont des réel. Trouvons ces réels.

La droite passe par le point C donc, $3a + 6b + c = 0$. De plus, le coefficient directeur vaut m ; $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ équivaut à $-\frac{a}{b} = m\ soit\ a = -bm$. Par ailleurs, pour $b = -1$, on a $a = m$ et $c = 6 - 3m$. D'où $(D_m)\ : mx - y + 6 - 3m = 00$.

- **2ème méthode :**
  - ✓ Vérifions que $C \in (D_m)$.

    $m(3) - 6 + 6 - 3m = 0$. Donc, $C \in (D_m)$.

  - ✓ Vérifions que le coefficient directeur de $(D_m)$ est m.

    $mx - y + 6 - 3m = 0 \Leftrightarrow y = mx + 6 - 3m$. Donc, le coefficient directeur de $(D_m)$ est m.

  Conclusion, $(D_m)\ : mx - y + 6 - 3m = 0$.

**5) Distance de $\Omega$ à $(D_m)$ en fonction de m.**

$$d(\Omega, (D_m)) = \frac{|3m - 1 + 6 - 3m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{\mathbf{5}}{\sqrt{\boldsymbol{m^2 + 1}}}$$

Pour que $(D_m)$ soit tangente à $(\Gamma)$, il faut que $d(\Omega, (D_m)) =$ rayon de $(\Gamma) = 3$. Soit $\frac{5}{\sqrt{m^2+1}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 1} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow m^2 + 1 = \frac{25}{9} \Leftrightarrow m^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \boldsymbol{m = \frac{4}{3}\ ou\ m = -\frac{4}{3}}$.

**__Exercice 2__ :**

**1)** Résolution des systèmes :

**a)** $\begin{cases} xy = -2 \\ x^3 + y^3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = 7 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 7 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} (x+y)^3 + 6(x+y) - 7 = 0\ (1) \\ xy = -2\ (2) \end{cases}$. En posant $X = x + y$, (1) devient $X^3 + 6X - 7 = 0$.

Une racine évidente de cette équation est 1 car $(1)^3 + 6(1) - 7 = 7 - 7 = 0$ alors on trouve un polynôme du second degré tel que $X^3 + 6X - 7 = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$. Par identification, on a $a = 1, b = 1\ et\ c = 7$. L'équation $X^2 + X + 7 = 0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ car le discriminant est négatif. Par conséquent, $X = 1$ est la seule solution. A cet effet, $X = x + y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$ $x = -1\ ou\ x = 2$ **D'où** $\boldsymbol{S = \{(-1; 2), (2; -1)\}}$.

**b)** $\begin{cases} mx + 3y = 2m + 3\ \ (1) \\ 3x + my = -m\ \ (2) \end{cases}$. 3(1)-m(2) équivaut à $9y - m^2y = 6m + 9 + m^2 \Leftrightarrow y = \frac{m+3}{3-m}\ et\ x = \frac{6m}{m-3}$. **D'où** $\boldsymbol{S = \left\{\left(\frac{m+3}{3-m}; \frac{6m}{m-3}\right), m \in \mathbb{R}\right\}}$.

**2)** a) Justification :

En effet, d'après la propriété directe de Pythagore, on a : $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 0$. Pa ailleurs, le périmètre vaut 24 m donc, $a + b + c = 24$. Nous savons que dans un triangle, la somme de deux cotés est toujours supérieure au troisième. Donc, $c < a + b$. D'où le système.

**b)** Démontrons :

Supposons que $(a, b, c)$ soit solution de (S) et montrons que c<12 et $a$ $et$ $b$ solutions de (E).

En effet, $\begin{cases} a^2 + b^2 - c^2 = 0 \ \ (1) \\ a + b + c = 24 \ \ (2) \\ c < a + b \ \ (3) \end{cases}$. (2) équivaut à $a + b = 24 - c \Leftrightarrow (a + b)^2 = (24 - c)^2 \Leftrightarrow$ $a^2 + b^2 + 2ab = (24 - c)^2 \Leftrightarrow c^2 + 2ab = (24 - c)^2 \Leftrightarrow 2ab = (24 - c)^2 - c^2 \Leftrightarrow 2ab = 24^2 +$ $c^2 - 48c - c^2 \Leftrightarrow 2ab = 24^2 - 48c \Leftrightarrow ab = 24(12 - c)$. On obtient $\begin{cases} a + b = 24 - c \\ ab = 24(12 - c) \end{cases}$ soit $x^2 - (24 - c)x + 24(12 - c) = 0$. Par ailleurs, pour que a et b soient solutions de (E), il faut que $\frac{(24(12-c))}{1} < 0 \Leftrightarrow c > 12$. D'où le résultat.

**c)** Pour c=5, c'est impossible de trouver a et b. Impossible de résoudre (S).

**<u>Exercice 3</u> :**

**1) a) Valeurs de m pour que l'équation admet deux solutions.**

$\Delta_m = 25m^2 - 16m^2 - 1 = 9m^2 - 1$. $\Delta_{\boldsymbol{m}} > 0 \Leftrightarrow \left(\boldsymbol{m} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}\right)\left(\boldsymbol{m} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}\right) > 0 \Leftrightarrow m \in \left]-\infty; -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}\right[ \cup \left]\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}; +\infty\right[$.

**b)** Valeurs de m : $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{IR}$.
**c) Valeurs de m.**

Le produit est $\alpha\beta = 4m^2 + 1$ et la somme $\alpha + \beta = -5m$ alors, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = -\frac{5m}{4m^2+1} = 1$.
Donc, $4m^2 + 1 = -5m \Leftrightarrow 4m^2 + 5m + 1 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{m} = \boldsymbol{-1}$ $\boldsymbol{ou}$ $\boldsymbol{m} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}$.

**2)**

**a)** $5|x - \sqrt{3}| + 14\sqrt{|x - \sqrt{3}|} - 24 = 0$. En posant $X = |x - \sqrt{3}|$, avec $X \geq 0$ ; l'équation devient $5X + 14\sqrt{X} - 24 = 0$ équivaut à $25X^2 - 436X + 576 = 0$ $soit$ $X = 36$ $ou$ $X = 400$. Ceci dit $|x - \sqrt{3}| = 36 \Leftrightarrow x = 36 + \sqrt{3}$ $ou$ $x = -36 + \sqrt{3}$. Et $|x - \sqrt{3}| = 400 \Leftrightarrow x = 400 + \sqrt{3}$ $ou$ $x = -400 + \sqrt{3}$. D'où $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{-36} + \sqrt{\boldsymbol{3}}; \boldsymbol{-400} + \sqrt{\boldsymbol{3}}; \boldsymbol{36} + \sqrt{\boldsymbol{3}}; \boldsymbol{400} + \sqrt{\boldsymbol{3}}\}$.

**b)** $\sqrt{x^3 - 27} < x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 27 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ x^3 - 27 < (x - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [3; +\infty[ \\ (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - (x - 3)^2 < 0 \end{cases}$. On obtient $(x - 3)(x^2 + 3x + 9 - x + 3) < 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 2x + 6) < 0$. Le discriminant de l'équation $x^2 + 2x + 6 = 0$ est égal à $-20$. Donc, $\boldsymbol{S} = ]-\infty; \boldsymbol{3}[ \cup ]\boldsymbol{3}; +\infty[$.

**<u>Exercice 4</u>** :

**1) Attendue par chaque apprenant.**

**2) Montrons que H est le barycentre des point A et C.**

$\overrightarrow{AH} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \boldsymbol{H = bar}\{(\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{1}); (\boldsymbol{C}, \boldsymbol{3})\}$.

**3) Voir figure.**
**4) Démontrons que les points B, G et H sont alignés.**

$G = bar\ \{(A, -1); (B, 2); (C, 3)\} \Leftrightarrow G = bar\ \{(B, 2); (H, 2)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$. D'où les point B, G et H sont alignés.

**5) Déterminons l'ensemble des points**

$MA^2 - MB^2 = -3$. L'ensemble cherché est la droite perpendiculaire à (AB) au point $\Omega$ tel que $\overline{I\Omega} = -\frac{3}{\overline{AB}} = \frac{3}{3} = 1$.

**6) a) Montrons**

$MA^2 + MB^2 = MI^2 + IA^2 + MI^2 + IB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{4} + \frac{AB^2}{4} = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$. D'où le résultat.

**b) Ensemble des points.**

$MA^2 + MB^2 = 1 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 1 \Leftrightarrow 2MI^2 = 1 - \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{1}{2} - \frac{9}{4} = -\frac{7}{4} < 0$.
D'où l'ensemble cherché est vide.

**7) Montrons que les droites sont concourantes.**

Posons $T = bar\ \{(A, 3); (B, 1); (C, 5)\}$. On a :

- $T = bar\ \{(Q, 4); (C, 5)\}$ équivaut à $T \in (QC)$ ;
- $T = bar\ \{(A, 3); (R, 6)\}$ équivaut à $T \in (AR)$ ;
- $T = bar\ \{(B, 1); (P, 8)\}$ équivaut à $T \in (BP)$ ;

**Conclusion, les droites (AR), (BP) et (CQ) sont concourantes.**

## Partie B : Evaluation des compétences

1) Pour répondre à cette question, nous allons trouver les dimensions de ce terrain, puis le périmètre et ensuite déduire le montant total.

Soit x la longueur du troisième côté. Alors, la longueur du plus long côté est $2x - 10$. Par ailleurs, en appliquant la propriété directe de Pythagore, on a $40^2 + x^2 = (2x - 10)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 40x - 1500 = 0 \Leftrightarrow x = 30$. Donc, la longueur du plus long côté est 50 m. Le ***périmètre*** vaut alors 40+30+50=**120 m**. La ***dépense totale*** est finalement 120x700=**84 000 FCFA**.

**2) Déterminons l'avoir de chacun.**

| MARC | LUC | JEAN |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $z$ |
| Perd | Gagne | Gagne |

| | | |
|---|---|---|
| $x-y-z$ | $2y$ | $2z$ |
| Gagne | Perd | Gagne |
| $2(x-y-z)$ | $2y-2z-x+y+z$ $=3y-x-z$ | $4z$ |
| Gagne | Gagne | Perd |
| $4x-4y-4z$ | $6y-2x-2z$ | $4z-2x+2y+2z-3y+x$ $+z$ $=7z-x-y$ |

On obtient le système $\begin{cases} x-y-z=600 \\ -x+3y-z=1200 \\ -x-y+7z=2400 \end{cases}$ Après résolution, on trouve $x=3900, y=2100$ et $z=1200$. **D'où l'avoir de MARC est 3900, celui de LUC 2100 et celui de JEAN 1200.**

**3)** Le premier Janvier le prix est de 100 F. L'objectif ici est de trouver la valeur de x puis déduire la valeur du kilowatt à ce mois d'Avril.

En effet, en Février on a : $100+\frac{100\times x}{100}=100+x$ ; en Mars on a : $100+x+\frac{(100+x)\times x}{100}=121 \Leftrightarrow x^2+200x-2100=0$ *soit* $x=10$. Le taux est de 10 %. Alors, en Avril on aura : $121+\frac{121\times 10}{100}=121+12{,}1=133{,}1\approx 132\ F$. **Conclusion, le prix du kilowatt au mois d'Avril vaut 132 F**.

***Quand vous vous demandez où est Dieu pendant les périodes difficiles de votre vie, souvenez-vous que le professeur reste toujours silencieux pendant l'examen (Albert Einstein) ! ! ! ! !***