Partie A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice I / (5 points)

1.) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 2 - 2i\sqrt{3} = 0$

$z^2 = -2 + 2i\sqrt{3} = (1 + i\sqrt{3})^2$

$\begin{cases} z = 1 + i\sqrt{3} \\ z = -1 - i\sqrt{3} \end{cases}$ **0,75 pt**

2.a) Donnons les éléments caractéristiques de s

s est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ **0,75 pt**

2.b) Déterminons les images par s des points A et B. **0,5 pt**

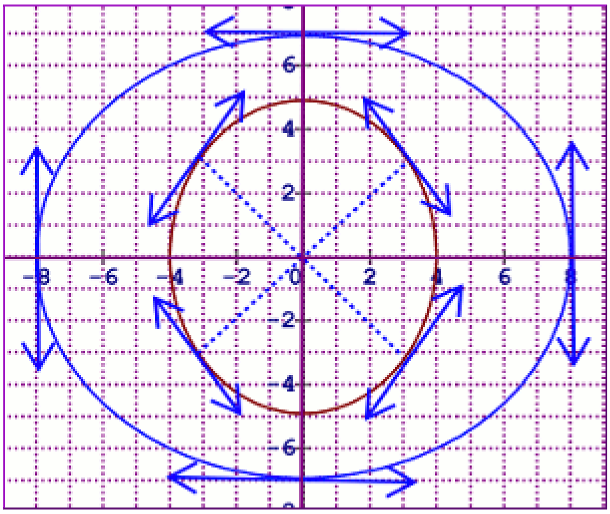
On a : $(1 - i\sqrt{3})\, z_A = 4$ et $(1 - i\sqrt{3})\, z_B = -4$, donc $s(A) = F$ et $s(B) = G$

3.a) Déterminons une équation de l'image (ε')de (ε) par la similitude s **1 pt**

O est le centre de (ε') qui est une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, d'où $c = OF = 4$; $e = \frac{c}{a}$; donc $a = 8$ et $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{48}$

Donc une équation de (ε') est $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

3.b) Construisons (ε') puis (ε) dans le même repère. **1 pt**



On peut remarquer que l'ellipse (ε) est l'image de l'ellipse (ε') par la similitude s^{-1} qui est de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

4) Déterminons la probabilité pour que Aicha choisisse deux points de l'axe focale de (ε')

Il y a trois de ces cinq points qui appartiennent à l'axe focale de (ε'), donc la probabilité demandée est : **1 pt**

$P = \frac{A_3^2}{A_5^2} = \frac{3}{10}$

Exercice 2 / 5 pts

1.a) Démontrons que E_k est un sous espace vectoriel de E **1 pt**

• $f(\vec{O}) = \vec{O} = k\vec{O}$, donc $\vec{O} \in E_k$ et alors $E_k \neq \phi$

• Soient $\vec{u}$, $\vec{v} \in E_k$, $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\vec{u} + \vec{v} \in E_k$ et que $\lambda\vec{u} \in E_k$.

$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} = k(\vec{u} + \vec{v})$, donc $\vec{u} + \vec{v} \in E_k$

$f(\lambda\vec{u}) = \lambda(k\vec{u}) = k(\lambda\vec{u})$ donc $\lambda\vec{u} \in E_k$

Remarque : on peut aussi démontrer que $E_k = \ker(f - kId_E)$

1.b) Démontrons que $\vec{u} \in \mathrm{Imf}$ si et seulement si $\vec{u} \in E_2$. **1 pt**

• Soit $\vec{u} \in E_2$:

$\vec{u} \in E_2 \Rightarrow f(\vec{u}) = 2\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = f(\frac{1}{2}\vec{u})$; donc $\vec{u} \in \mathrm{Imf}$

• Soit $\vec{u} \in \mathrm{Imf}$, il existe $\vec{v} \in E$ tel que $\vec{u} = f(\vec{v})$, ainsi $f(\vec{u}) = f \circ f(\vec{v})$ d'où $f(\vec{u}) = 2f(\vec{v}) = 2\vec{u}$ donc $\vec{u} \in E_2$

Conclusion $\vec{u} \in \mathrm{Imf}$ si et seulement si $\vec{u} \in E_2$

2.a) Démontrons que $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$, $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$ et $f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$.

On a :

$f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$: (1)

$f(\vec{i}) - f(\vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$: (2)

$f(\vec{i}) - f(\vec{j}) + f(\vec{k}) = \vec{0}$: (3)

(1) + (2) implique que $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$

(1) - (2) implique que $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$

(3) implique que $f(\vec{k}) = f(\vec{j}) - f(\vec{i}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$

2.b) Donnons la matrice M dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **0,5 pt**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.c) Démontrons que $f \circ f = 2f$ **0,5 pt**

$$M \times M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.d) Déterminons l'image Imf de f. Précisons une de ses bases, le noyau de Kerf

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{u} =\in \mathrm{Kerf} \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0}$ ce qui implique que $\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = z \\ y = -x \end{cases}$ soit $\vec{u} = x(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ donc Kerf est la droite vectorielle de base $(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

2.e) Déterminons l'image Imf de f et précisons ses bases

Imf est engendré par les vecteurs $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ et $f(\vec{i})$ et comme $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$, $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$ et $f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$, alors Imf est engendrée par $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Or $\dim \mathrm{Imf} = \dim E - \dim \mathrm{Kerf} = 2$ donc Imf est le plan vectoriel de base $(\vec{i}, \vec{j})$, qui est aussi le plan d'équation $z = 0$.

Exercice 3 / 5 pts

1) Démontrons que $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$ **0,5 pt**

En effet, $f'(x) = -e^{x}\cos x - e^{-x}\sin x$ et $f''(x) = 2e^{-x}\sin x$ en substituant ces fonctions dans l'équation initiale, nous avons $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$

2) Étudions les variations de f et dressons son tableau de variations. **1,25 pt**

La fonction f est définie et dérivable sur $[0, 2\pi]$

$f(0) = 1$, $f(2\pi) = 2e^{-2\pi}$

Dans $[0, 2\pi]$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$, Ainsi la fonction f est croissante sur $[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$, décroissante sur $[0; \frac{3\pi}{4}]$ et $[\frac{7\pi}{4}; 2\pi]$.

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{7\pi}{4}}$	$\searrow$	$e^{-2\pi}$

3.a) Démontrons que $e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$ **0,5 pt**

Soit $x \in [0; 2\pi]$, alors $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $e^{-x} \succ 0$ donc $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$.

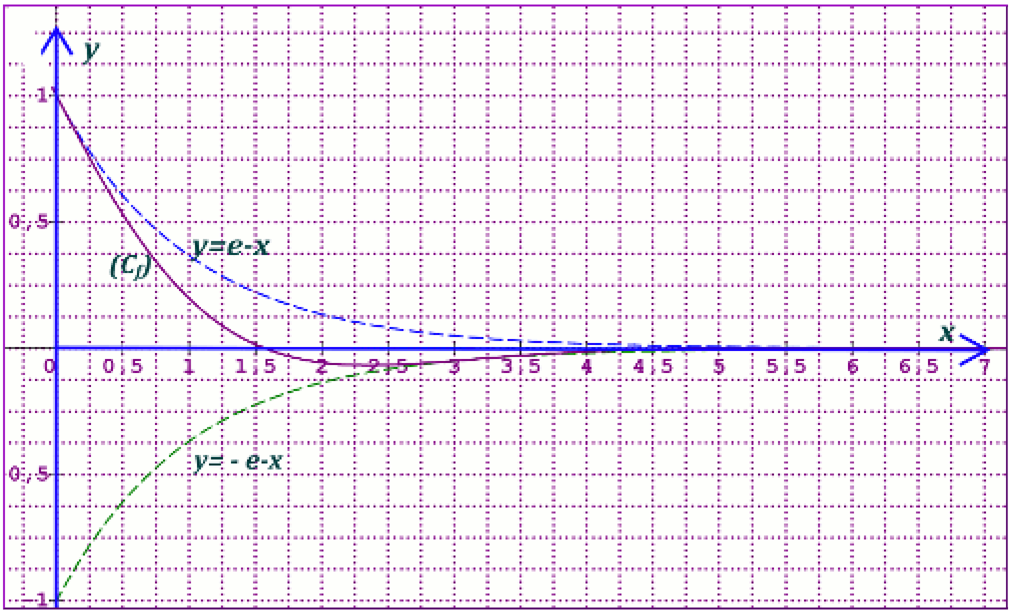
3.b) Déterminons les coordonnées des points d'intersection de (Cf) avec les courbes $y = -e^{-x}$ et $y = e^{-x}$. **0, 75 pt**

Soit $x \in [0; 2\pi]$

$f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2\pi$. Donc les coordonnées des points d'intersection de (Cf) avec la courbe $y = e^{-x}$ sont $(0; 1)$ et $(2\pi; e^{-2\pi})$

$f(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$ donc la courbe (Cf) rencontre la courbe d'équation $y = -e^{-x}$ en un point de coordonnées $(\pi; e^{-\pi})$

4.) Traçons dans le même repère, les courbes d'équations $y = -e^{x}$ et $y = -e^{-x}$ puis (Cf) sur $[0; 2\pi]$



Les courbes d'équations $y = e^{-x}$ et $y = -e^{-x}$ sont symetriques par rapport à l'axe des abscisses. Celle d'équation $y = e^{-x}$ se déduit de celle de la fonction $y = e^{x}$ par symétrie par rapport à l'axe (Oy)

5. Calculons l'aire de la partie du plan délimitée par (C_f) et la courbe d'équation $y = e^{-x}$ sur $[0; 2\pi]$ **1 pt**

En unité d'aire, cette aire :

$$\int_0^{2\pi} (e^{-x} - f(x))dx = [e^{-x}(-1 + \frac{1}{2}(-\sin x + \cos x)]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi})$$

Cette aire en cm3 est $4\,(1 - e^{-2\pi})$

Partie B : Évaluation des compétences / 5 pts

1) Déterminons en combien d'années le gisement A va s'épuiser.

Désignons par A_n la quantité en milliards de m^3 de gaz extraite à la nieme années après l'inauguration : n étant un nombre entier naturel non nul. Tant que le gisement reste suffisamment fourni.

on a $A_1 = 5,01$ et $A_{n+1} = A_{n+1} + 0,75.75$. D'où $A_{n+1} = 0,75n + 4,26$

Au bout de ces n années, la quantité totale de gaz extraite du gisement A est : $Q_n = A_1 + ... + A_n = \frac{n(A_1+A_n)}{2}$ $= 0,375n^2 + 4,635n$ avec $Q_n \leq 100 \Rightarrow 0,375n^2 + 4,635n \leq 100$ c'est-à-dire que pour $n \in \left]0; \frac{-927+\sqrt{6859329}}{150}\right]$

avec $\frac{-927+\sqrt{6859329}}{150} \approx 11,28$

Comme $Q_{11} = 0,375(11)^2 + 4,635(11) = 96,36$, le reste du gisement A alors vidé à la 12e année. Le gisement A va donc s'épuiser en 12 ans.

2) Déterminons le nombre d'années d'extraction pour épuiser le gisement B.

$q'(t) = \frac{1}{2t+1} + 0,02t \Rightarrow q(t) = \frac{1}{2}\ln(2t+1) + 0,01t^2 + c$, c étant une constante réelle. $q(0) = 0$ soit $q(t) = \frac{1}{2}\ln(2t+1) + 0,01t^2$

Le gisement B va s'épuiser lorsque $q(t) = 100$.

La fonction q est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. De plus 100 est entre $q(98) \approx 98,69$ et $q(99) \approx 100,65$; donc l'équation $q(t) = 100$ admet une unique solution entre 98 et 99.

Conclusion : Le gisement B va s'épuiser à la 99° année.

3) Déterminons le nombre d'années après l'inauguration pour vider le gisement C de son contenu.

on a : $\frac{q'(t)}{q(t)} = ... = \frac{q'(t)}{q(t)} = \frac{5,01}{5,01} = 1$

D'où $q(t) = q'(t)$.

c étant une constante réelle.

$q(1) = 5,01 \Rightarrow ce = 5,01 \Rightarrow c = 5,01e^{-1}$

Ainsi $q(t) = 5,01e^{(t-1)}$

Le gisement C va s'épuiser lorsque $q(t) = 100$, soit $5,01e^{(t-1)} = 100$

$t = 1 + \ln(\frac{10000}{501}) \approx 3,99$

Donc le gisement C va se vider 4 ans après l'inauguration.

Présentation : 0,5 pt