EXPONENTIELLE - FEUILLE D'EXERCICES

➲ SIMPLIFIER, DEVELOPPER ET FACTORISER AVEC EXPONENTIELLE

Exercice 1 : simplifier les expressions suivantes :

$A = (e^3)^2 \times e^5$ $\quad B = e^{-2} \times e^7 \times e$ $\quad C = \frac{e^4}{e^7}$ $\quad D = \frac{e^{-2}}{e}$ $\quad E = \left(\frac{e^2}{e^{-3}}\right)^3$

$F = (e^2 - 1)(e^2 + 1)$ $\quad G = \frac{x}{(e^2)^2}$ $\quad H = e^{2x} \times e$ $\quad I = \frac{e^{4x}}{e^{-x}}$ $\quad J = \left(\frac{1}{e^x}\right)^2$

Exercice 2 : développer les expressions suivantes :

$A = (e^2 - e)^2$ $\quad B = (e^3 - e)(1 - e^2)$ $\quad C = e(e^{-1} + e^2)$

$D = (e^4 - e^{-4})^2$ $\quad E = (1 - e^3)(1 + e^3)$

Exercice 3 : factoriser les expressions suivantes :

$A = e^{3x} - e^x$ $\quad B = e^{2x} - e^{4x}$ $\quad C = 2e^{2x} - 4e^x$

Exercice A : utiliser les règles de l'exponentielle

a) Simplifier $A = \frac{e^{3x} \times e^{-x}}{e^x}$ et $B = e^x \times (e^{-2x})^3$

b) Développer $C = e^2(e^{-2} + e)$et $D = (e^4 - e)(e^4 + e)$.

c) Factoriser $E = 2e^{6x} - e^{2x}$.

➲ RESOLUTION D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS AVEC EXPONENTIELLE

Exercice 4 : résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^x = 1$ $\quad$ b) $e^x = e^{-1}$ $\quad$ c) $e^x - e = 0$

d) $e^{2x+4} = 1$ $\quad$ e) $e^{-3x+7} = e^{-2}$ $\quad$ f) $e^{x^2} - e = 0$

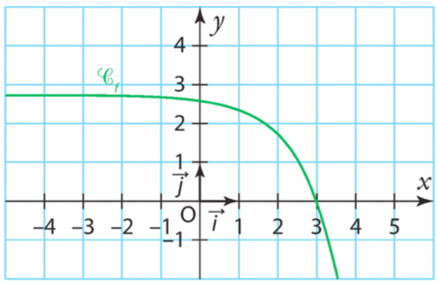
Exercice 5 : résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $e^{3x+1} > 1$ $\quad$ b) $e^{-2x+1} \geq e^4$ $\quad$ c) $e^{2x+1} + e^{5x-7} < 0$

d) $(x^2 - 1)(e^2 - e^{2x-1}) = 0$ $\quad$ e) $(1 - e^x)e^x = 0$

Exercice 6 : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e - e^{x-2}$.

Sa courbe représentative C_f a été tracé dans le repère ci-contre :



1. a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
   b) Retrouver le résultat précédent par le calcul.
2. a) Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) > e$.
   b) Contrôler le résultat précédent graphiquement.

➲ DERIVATION ET ETUDE DE VARIATIONS AVEC EXPONENTIELLE

Exercice 7 : étudier le signe des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$.

a) $e^{x+1}(4x - 7)$ $\quad$ b) $xe^x - x$ $\quad$ c) $4x + 4e^{2-x}$

Exercice 8 : calculer la dérivée des fonctions suivantes sur l'ensemble précisé.

a) $f: x \longmapsto -3e^x + 4e^{-2x+1} + e$ sur $\mathbb{R}$ $\quad$ b) $g: x \longmapsto (e^x + 1)(e^x - 1)$ sur $\mathbb{R}$ $\quad$ c) $h: x \longmapsto \frac{4}{e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$

d) $h: x \longmapsto \frac{x+1}{e^x}$ sur $\mathbb{R}^*$ $\quad$ e) $k: x \longmapsto \frac{e^x+1}{e^x-1}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 9 : pour chacune des fonctions suivantes, étudier les variations sur l'ensemble précisé.

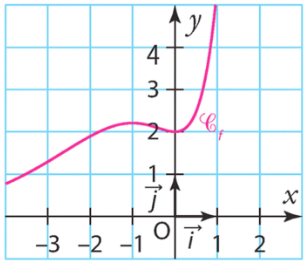
a) $f_1 : x \longmapsto e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ b) $f_2 : x \longmapsto 4e^{-5x+5}$ sur $\mathbb{R}$ c) $f_3 : x \longmapsto -e^{-2x+3}$ sur $\mathbb{R}$

d) $f_4 : x \longmapsto \frac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}$ e) $f_5(x) = \frac{2}{e^x+3}$ sur $\mathbb{R}$ f) $f_6 : x \longmapsto \frac{4e^x}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$ h) $f_7 : x \longmapsto \frac{2e^{3x}}{x+5}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-5\}$

Exercice 10 : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x^2 - x + 1)e^x$.

Sa courbe représentative C_f a été tracée dans le repère ci-contre.

1. Conjecturer les variations de f.
2. Démontrer la conjecture précédente.
3. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.



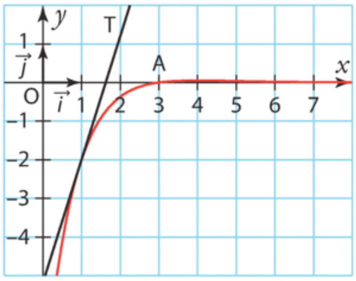
Exercice B : fonction exponentielle mystère

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels.

Sa courbe représentative C_f, tracée dans le repère ci-dessous, passe par le point $A(3; 0)$.

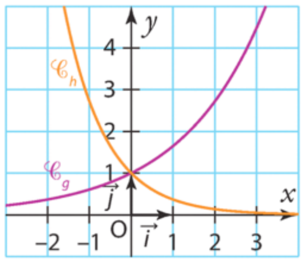
T est la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

1. Déterminer la valeur de a et de b. *On se montrera qu'on se ramène à un système* $\begin{cases} 3a + b = 0 \\ a + b = -2e \end{cases}$
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.



Exercice 11 : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{kx}$ où k est un nombre réel.

1. Calculer $f'(0)$ en fonction de k.
2. g et h sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui ont également une expression de la forme e^{kx}, où $k \in \mathbb{R}$.
   Leurs courbes représentatives ont été tracées dans le repère ci-contre.
   Déterminer pour chacune d'elle une valeur approchée de k.



➲ SUITE ET EXPONENTIELLE

Exercice 12 : On considère les quatre suites ci-dessous :

- (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^n$
- (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = e^{-6n}$
- (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = e^{3n}$
- (r_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $r_n = e^2 n$

a) Donner la nature de ces suites.

b) Déterminer le sens de variations de chacune d'entre elles.

Exercice C : exponentielle et suite

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la somme $S = 1 + e + e^2 + e^3 + \cdots + e^n = \sum_{k=0}^{n} e^k$.

1. Montrer que S est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.
2. Déterminer S en fonction de n.
3. Pour quelle valeur de n la somme S va-t-elle dépasser un milliard ?

Exercice 13 : durant la période des soldes, le gérant d'un magasin souhaite se débarrasser d'un stock de pantalons, dont le prix affiché avant les soldes est de 35 €. Il décide pour cela de baisser le prix des pantalons de 10 % chaque semaine. On note u_n le prix du pantalon (en €) après n semaines. Ainsi $u_0 = 35$.

1. Déterminer le prix du pantalon au bout d'une semaine.
2. Déterminer une valeur approchée de $e^{-0,10536}$ à 10^{-3} près.
3. Justifier que l'on peut approximer le nombre u_n par $35 \times e^{-0,10536n}$.
4. A l'aide de la calculatrice, déterminer si le prix aura été divisé par trois à la fin de la période des soldes (qui durent 6 semaines).

➲ EXERCICES BILAN

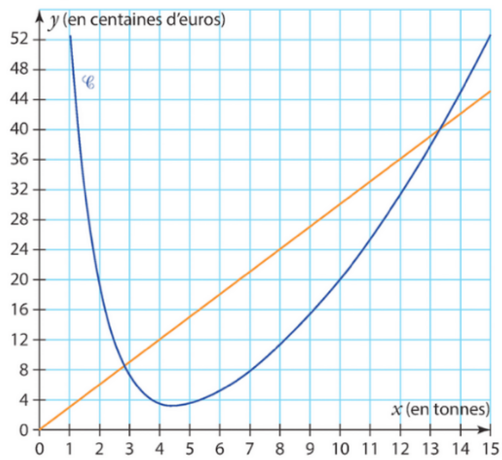
Exercice 14 : avec une fonction auxiliaire.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)e^x + x + 1$.

1. Déterminer une expression de $f'(x)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)e^x + 1$
   a) Étudier les variations de g.
   b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$
3. Montrer que $f'(x) = g(x)$ et en déduire les variations de la fonction f

Exercice 15 : l'entreprise *BBE* (*Bio Bois Énergie*) fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez les particuliers et les collectivités. L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour. Les coûts de fabrication sont modélisés par une fonction C définie sur $[1; 15]$ par $C(x) = 0,3x^2 - x + e^{-x+5}$ où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.
Pour cette entreprise, le prix de vente d'une tonne de granulés de vois est de 300 €.

1. Déterminer la recette $R(x)$ en centaines d'euros obtenues pour x tonnes de granulés vendus.
2. Calculer les coûts de production pour 5 tonnes de granulés produites.
3. On donne dans le graphique ci-contre les représentations graphiques des fonctions C et R.
   a) Associer chaque courbe à sa fonction.
   b) Déterminer graphiquement pour quelle quantité de granulés le coût quotidien est minimal.
   c) Déterminer le bénéfice réalisé pour 6 tonnes fabriquées et vendues.
   d) Déterminer pour quelle quantité produite et vendue l'entreprise réalise un bénéfice.



Exercice D : Un caillou à la mer

Un enfant monte au sommet d'un phare et laisse tomber verticalement un caillou dans la mer.
On modélise la vitesse (en mètre par seconde) du caillou au bout de t secondes par la fonction :

$$f(t) = 6 \times \frac{e^{0,1t} - 1}{e^{0,1t} + 1}$$

1. Vérifier que le caillou est bien lâché sans vitesse initiale selon ce modèle.
2. a) Déterminer une expression de $f'(t)$.
   b) Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
3. La vitesse du caillou dépassera-t-elle les 10 m.s-1 ?

<u>Exercice 16</u> : le tableau suivant indique la population de la Belgique en 1831 et en 1866.

Année	1831	1866
Population (en milliers)	3787	4828

(*Source* : Institut national de statistique, Bruxelles)

Manquant de données, on souhaite estimer la population de la Belgique au XIX^{e} siècle en s'appuyant sur ces deux dates. On souhaite modéliser la population (en milliers) de la Belgique l'année $1831 + n$ par une suite (u_n) de la forme $u_n = C \times e^{kn}$ où C et k sont deux constantes réelles.

1. Donner les deux équations que doivent vérifier C et k.
2. En déduire la valeur de C.
3. Déterminer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de k à 10^{-3} près.
4. Dans la suite de l'exercice, on prendre $u_n = 3787e^{0{,}00694n}$.
   a) Déterminer une estimation de la population en 1840 selon ce modèle.
   b) Toujours selon ce modèle, déterminer en quelle année la population de la Belgique dépasserait les 10 millions d'habitants.
   c) Une étude statistique estime la population de la Belgique en 1900 à 6 694 milliers. Déterminer l'erreur en pourcentage de l'estimation obtenue avec ce modèle.

<u>Exercice 17</u> : concentration d'un médicament.

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre ;
- t représente le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure ;
- d est le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure ;
- a est un paramètre réel strictement positif, appelé *clairance*, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient. En médecine, on appelle *plateau* la limite en $+\infty$ de la fonction C.

A. Étude d'un cas particulier.

La *clairance* a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84. Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$C(t) = 12\left(1 - e^{-\frac{7}{80}t}\right)$$

1. Étudier le sens de variations de C sur $[0; +\infty[$.
2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

B. Étude de fonctions.

1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right)$
   Démontrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$:
   $$f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$$
   où g est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{3x}{40}e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1$
2. On donne le tableau de variations de la fonction g :

x	0	$+\infty$
Variations de g	0 ↘	-1

   En déduire le sens de variations de la fonction f.

➲ EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Exercice α : lorsqu'un animal meurt, le Carbone 14, qui est un isotope radioactif du carbone, n'est plus renouvelé : au fur et à mesure des désintégrations radioactives, la quantité de Carbone 14 contenue dans les ossements décroît.
En mesurant le pourcentage restant de Carbone 14 dans des ossements, on peut arriver à déterminer la période lors de laquelle a vécu cet animal. En notant $f(t)$ le taux de noyaux de Carbone 14 restants, où t représente le temps écoulé en année depuis le décès, on sait que $f(t) = e^{-kt}$ avec $k = 0{,}0001238$.

1. Calculer $f(6\,000)$.
   Quel pourcentage de Carbone 14 reste-t-il encore dans les ossements après 6 000 ans ?
2. Déterminer le pourcentage de Carbone 14 restant dans les ossements après 12 000 ans.
3. La datation au Carbone 14 est utilisée pour dater des ossements âgés de 500 à 70 000 ans.
   a. Quel pourcentage de Carbone 14 reste-t-il après 500 ans ? après 30 000 ans ?
   b. On a mesuré un pourcentage de 22,64 % de Carbone 14 sur un squelette de lapin fossilisé.
      À quelle période a-t-il vécu ?

Exercice β : la constante d'Euler e

Partie A : ***Un Encadrement de e^x.***

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - (1 + x)$.
   Étudier les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.
2. En déduire que, pour tout nombre réel x, $1 + x \leq e^x$ (E_1).
3. À partir de (E_1), démontrer que, pour tout nombre réel x strictement inférieur à 1, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ (E_2).

Partie B : ***Un Encadrement du nombre e.***

1. Déduire de l'inégalité (E_1) que, pour tout nombre entier naturel n non nul, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.
2. Déduire de l'inégalité (E_2) que, pour tout nombre entier naturel n non nul, $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Partie C : ***Une valeur approchée du nombre e.***

On considère les suites (u_n) et (v_n) définie respectivement sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

1. Déduire des questions précédentes que, pour tout nombre entier naturel n non nul, $u_n \leq e \leq v_n$.
   On pourra démontrer l'année prochaine que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers e.
2. Donner une valeur approchée de $u_{1\,000}$ et $v_{1\,000}$.
3. En déduire une valeur approchée du nombre e.