Noms et Prénoms de l'élève :

Chapitre 3 :

ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

Leçon 1 :

ANGLES ORIENTES

Compétence générale

Appréhender et utiliser les notions des angles orientés pour résoudre les problèmes de la vie courante.

Compétences spécifiques

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable :

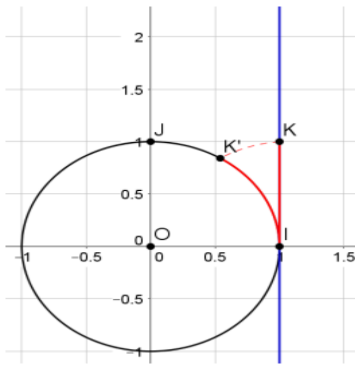
- ………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
- ………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

Centre d'orientation scolaire et académique, et de préparation des examens et concours nationaux et internationaux.

Contacts : 691831680/680701624

X
Vianney NENGOUEYE
PLETP-ET & E-Ing-GESI

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). (C) est le cercle trigonométrique. I' et J' sont les points de (C) diamétralement opposés respectivement à I et J. (T) est la tangente à (C) en I.



A. ANGLES ORIENTES

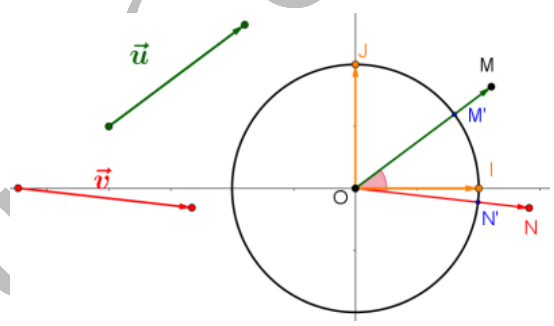
1. Définitions et propriétés

1.1.Définition 1 : Angle orienté

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$. Soit M' et N' les points d'intersection des demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ avec le cercle trigonométrique……………………………………………………

………

………



1.2. Propriété 1

………

………

Remarque : ………………………………………………………………………………………

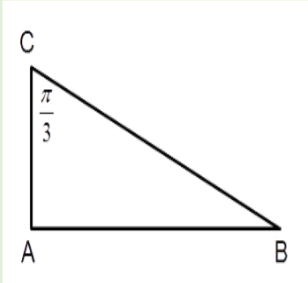
………

………

………

ATTENTION !!!

Il ne faut pas confondre un angle géométrique et un angle orienté.



Angles géométriques :

$$\widehat{ACB} = \widehat{BCA} =$$

Angles orientés :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) =$$

Remarque :

- ……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

1.3.Définition 2 : Mesures de l'angle orienté

DEFINITION : MESURE D'UN ANGLE ORIENTE

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

NB : ………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Remarques :

- ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  …………………………………………………………………………………………………..
- ……………………………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………………

MEMO : DETERMINATION DE LA MESURE PRINCIPALE D'UN ANGLE ORIENTE

Pour déterminer la mesure principale α d'un angle orienté dont une mesure θ est connue, on procède comme suit :

- ……………………………………………………………………………………………. ;
- …………………………………………………………………………………………… ;
- ……………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………;
- ……………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………

Remarques :

- ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………

Exemples :

Exemple 1 : On considère l'angle orienté de mesure $\frac{3\pi}{4}$. Trouver trois mesures en degré de cet angle orienté.

Exemple 2 : Soit un triangle rectangle isocèle ABC de sens indirect, rectangle en B.

a. Construire ABC

b. Calculer les angles géométriques $\widehat{ACB}, \widehat{BCA}$.

c. Déterminer trois mesures des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.

d. Les angles orientés $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ sont-ils égaux ?

Exemple 3 : Déterminer les mesures principales α des angles orientés de mesures $\frac{37\pi}{3}$, $\frac{-71\pi}{6}$ et $\frac{119\pi}{4}$. Puis placer sur le même cercle trigonométrique les points $M(\frac{37\pi}{3})$, $M(\frac{-71\pi}{6})$ et $M(\frac{119\pi}{4})$.

Exemple 4 : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). Soit A l'image du nombre réel $\frac{16\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique. Quelle est la longueur de l'arc $\widehat{IA}$?

2. Congruence modulo 2π

DEFINITION : CONGRUENCE MODULO 2π

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Remarques :

❖ ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

❖ ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

PROPRIETES 1

Pour tous nombres réels x, y, z et a, on a :

(1) ……………………………………………………………………………………………….;

(2) ……………………………………………………………………………………………….;

(3) ……………………………………………………………………………………………

Démonstration (TD)/*Indication :* *(1) et (2) utiliser la définition, (3) utiliser la définition pour les deux congruences, puis substituer la deuxième dans la première.*

Remarque : ………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………..

Exemples

Exemple 1 : Dans chaque cas, vérifier si $x \equiv y[2\pi]$:

a. $x = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{3\pi}{2}$, b. $x = \frac{2\pi}{3}$ et $y = \frac{14\pi}{3}$, c. $x = -\frac{5\pi}{4}$ et $y = \frac{3\pi}{4}$, d. $x = -\frac{29\pi}{12}$ et $y = \frac{67\pi}{12}$,

Exemple 2 : Déterminer les mesures principales α des angles orientés de mesures $\frac{37\pi}{3}$, $\frac{-71\pi}{6}$ et $\frac{119\pi}{4}$ en utilisant la congruence modulo 2π.

Exemple 3 : Soient $x = \frac{59\pi}{3}$ et $y = \frac{77\pi}{3}$ deux mesures d'angle orienté.

a. Montrer $x \equiv y[2\pi]$ et en déduire que x et y sont deux mesures d'un même angle orienté $\hat{\beta}$.
b. Déterminer la mesure principale α de cet angle orienté $\hat{\beta}$:
c. On pose $\frac{5\pi}{3} = x - 18\pi$; En déduire de tout ce qui précède que $\frac{23\pi}{3}$ est également une mesure de cet angle orienté $\hat{\beta}$.

3. **Somme de deux angles orientés**

Définition 4 : ……………………………………………………………………………………………

………

………

………

………

Remarque : ……………………………………………………………………………………………

………

4. Propriétés des angles orientés

PROPRIETES 2

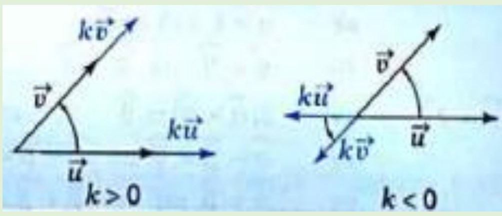
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}$ et tout réel non nul k, on a :

($P1$: ***Propri**é **de Chasles***):

……………………………………………………………………………..

Les propriétés suivantes sont les conséquences de la propriété de Chasles.

(P2) : ……………………………………………………………………



(P3) : …………………………………………………………………

(P4) : ……………………………………………………………………

(P5) : ……………………………………………………………………

(P6) : ……………………………………………………………………………………………………..

(P7) : ……………………………………………………………………………………………………

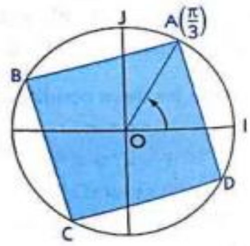
………

……

Démonstration (TD)/*Indication :* *(P1) définir trois vecteurs concourants dont leur point d'application est le centre du cercle trigonométrique puis utiliser la propriété selon laquelle l'angle au centre d'un cercle est* 2π. *(P2), (P3), P(4), P(5), (P6) et (P7), utiliser la propriété de Chasles ((P1)).*

Exemples :

Exemple 1 : ABCD est un carré inscrit dans un cercle (C) tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ soit l'angle droit direct et $\frac{\pi}{3}$ une mesure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$. Compléter le tableau ci-dessous



Angles	$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$	$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$	$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$	$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$
Mesures				

Exemple 2 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que : $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$. Donner la mesure principale des angles orientés suivants : $(-\vec{u}, -\vec{v})$; $(2\vec{u}, \vec{v})$; $(\vec{v}, \vec{u})$; $(-\vec{v}, \vec{u})$; $(3\vec{u}, \overrightarrow{-5v})$ et $(-\vec{v}, -\vec{v})$.

Exemple 3 : Soit A, B et C trois points du plan orienté tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{5}$. Donner la mesure principale des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$ *et* $(-2\overrightarrow{AB}, 3\overrightarrow{AC})$

5. Angles orientés et cercle

5.1.Caractérisation d'un cercle

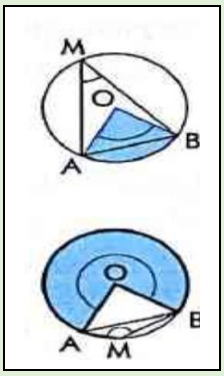
PROPRIETE 3

…………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………



Démonstration :

Si la corde $[AB]$ *est un diamètre ; alors la propriété est immédiate. En effet :* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \hat{\pi}$ *et de plus*

$$M \in (C) \iff \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$$

$$\iff 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \hat{\pi}$$

Donc $M \in (C) \iff 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Supposons désormais que la corde $[AB]$ *n'est plus un diamètre de* (C).

- ❖ $(\Rightarrow)$ *Démontrons que si* $M \in (C)$ *alors* $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

L'angle $\widehat{AMB}$ *intercepte l'arc* $\widehat{AB}$ *ou l'arc* $\breve{AB}$.

- *Si* $\widehat{AMB}$ *intercepte l'arc* $\widehat{AB}$, *alors les triangles MAB et OAB sont orientés dans le même sens et* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *donc* $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
- *Si* $\widehat{AMB}$ *intercepte l'arc* $\breve{AB}$, *alors les triangles MAB et OAB sont orientés en sens contraires et* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \hat{\pi} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *donc* $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\left(2\hat{\pi} - (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\right) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

- ❖ $(\Leftarrow)$ *Réciproquement, démontrons que : si* $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, *alors* $M \in (C)$.

Si $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, *les points A, B et M ne sont pas alignés, sinon on aurait* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \hat{0}$, *ce qui est contradictoire avec l'énoncé.*

Soit O' le centre du cercle circonscrit au triangle ABM ; on a : $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B})$. *Donc* $(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Les triangle isocèles OAB et O'AB ont une base commune $[AB]$ *et les angles* $(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B})$ *et* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *ont même mesure. Ces triangles sont donc confondus ou symétriques par rapport à la droite* (AB). *De plus, ils sont orientés dans le même sens ; ils sont donc confondus. Ainsi* $O = O'$ *et* $M \in (C)$.

MEMO

....

....

....

....

5.2. Points cocycliques

PROPRIETE 4

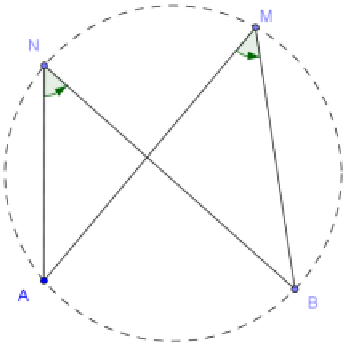
………

………

………

………

………



Démonstration :

- ($\Rightarrow$) *Démontrons que si A, B, M et N appartiennent à un même cercle* (C) *de centre O, alors* $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.
  On a : A, B, N et M appartiennent à un même cercle (C) *de centre O alors d'après la propriété 4,* $2(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *et* $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. *Donc* $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.
- ($\Leftarrow$) *Réciproquement, démontrons que : si* $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ *alors les points A, B, N et M sont cocycliques. On a :* $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ *alors* $2(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. *Désignons par* (C) *le cercle circonscrit au triangle ABN et par O le centre de ce cercle. On a :* $2(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *; donc* $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *et le point M appartient au cercle* (C). *Conséquence : les points A, B, N et M sont donc cocycliques.*

Exemples :

Exemple 1 : ABCD est un carré de sens direct, (C) est le cercle de centre O et de rayon OA. Démontrer par deux méthodes que le cercle (C) est circonscrit au carré ABCD.

Exemple 2 : Soit OAB un triangle quelconque. M est le projeté orthogonal de A sur (OB), N est le projeté orthogonal de O sur (AB).

a. Faire une construction graphique

b. Montrer que le point M est sur le cercle de diamètre [OA] ;

c. Montrer que le point N est sur le cercle de diamètre [OA] ;

d. En déduire que les points A, O, M et N sont cocycliques.

Exemple 3 : Le plan est orienté. Soit P, Q, R e S trois points quelconques du plan trois à trois non alignés tels que : $(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PS}) = 70°$, $(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QS}) = 30°$ et PQR rectangle en Q.

a. Déterminer les mesures des angles orientés $(\overrightarrow{SP},\overrightarrow{SQ})$ et $(\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ})$;

b. En déduire que les points P, Q, R et S sont cocycliques.

Exercices d'application

Exercice 1 : Sur le cercle trigonométrique, on considère les points A et B, images respectives des nombres réels $-\frac{1999\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

1. Placer les points A et B.
2. Quelle est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$?

Exercice 2 : Soit ABC un triangle ; on désigne par α une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Donner, en fonction de α, une mesure des angles $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$, $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BA})$.

Exercice 3 : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, k et k′ sont deux nombres réels non nuls. Exprimer $(k\vec{u},k'\vec{v})$ en fonction de $(\vec{u},\vec{v})$. *(On distinguera deux cas : $kk' > 0$ et $kk' < 0$).*

Exercice 4 : A, B, C et D sont quatre points distincts du plan. Démontrer que :

$$(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}) = \hat{0}$$

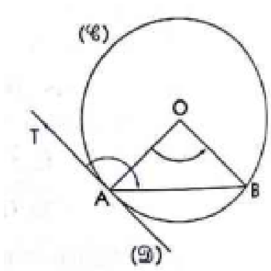
Exercice 5 : ABCD est un losange de sens indirect tel que : $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{6}$. Déterminer une mesure des angles $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA})$.

Exercice 6 : $[AB]$ est une corde d'un cercle (C) de centre O. M et N sont deux points de (C) n'appartenant pas au même demi-plan de frontière $[AB]$. On désigne par α, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$.

1. Déterminer, en fonction de α, une mesure des angles $(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB})$ et $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{MA})$;

2. Exprimer $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$ en fonction de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})$.

Exercice 7 : Soit (C) un cercle de centre O, A et B deux points distincts de ce cercle, (D) la tangente à (C) en A. Démontrer que pour tout point T du plan, distinct de A, on a : $T\epsilon(D) \quad \Leftrightarrow \quad 2(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.



Exercice 8 : Soit A, B, C et D des points du plan tels que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$. Démontrer que le triangle ABD est rectangle en A.

A, B, C et D sont des points tels que : $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{3}$, BCA est rectangle en B et direct. Montrer que les points A, C et D sont alignés.